Naturwissenschaftlich Technische Fakultät

UNIVERSITÄT SIEGEN

Ausarbeitung zum Vortrag Allgemeines über lineare Darstellungen endlicher Gruppen

Semester:	**Sommersemester 2016**
Dozent:	**Prof. Dr. Nils-Peter Skoruppa**
Seminar:	**Pro-/Seminar zur Arithmetik**
Modul:	**M 2.1.: Fachmathematische Vertiefung II**
Studiengang:	**Lehramt für Berufkollegs**
Fächer-kombination:	**Mathematik** **Maschinenbau** **Bildungswissenschaften**
Prüfung:	**Studienleistung (3 LP)**
Autor:	**Markus Siepe** **Markus.Siepe@student.uni-siegen.de**

§1. Allgemeines über lineare Darstellungen

§1.1 Definition von linearen Darstellungen

1.1.1 Vorbemerkung

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über C und

$GL(V)$ sei die Gruppe der Isomorphismen von V auf V, d.h.

die Menge aller $a: V \to V$, sodass

1. a ist lineare Abbildung von $V \to V$

2. a^{-1} existiert

Wir erinnern:

a^{-1} ist ebenfalls linear

1.1.2 Vorbemerkung

V habe eine Basis: (e_i) mit $i = 1,\dots,n$

Die lineare Abbildung $a: V \to V$ wird dann

bezüglich der Basis (e_i) durch eine $n \times n$-Matrix

beschrieben: (a_{ij}) mit $i, j = 1 \dots n$

Dabei sind die a_{ij} folgender maßen definiert:

$$a(e_j) = \sum_j a_{ij} e_j$$

Weiterhin gilt:

- $\det(A) \neq 0$ (denn A ist Isomorphismus)
- Matrixkoeffizienten können komplexe Zahlen sein
- $GL(V)$ entspricht den invertierbaren $n \times n$-Matrizen

1.1.3 Def.:(Lineare Darstellung)

Sei G eine endliche Gruppe . Eine lineare Darstellung von G in V ist ein Homomorphismus $\rho : G \to GL(V)$ der Gruppe G in die Gruppe GL(V).

Erinnerung (Homomorphismus) :

Jedem Element $s \in G$ wird ein Element $\rho(s)$ aus GL(V) zugeordnet, sodass

$\rho(s \cdot t) = \rho(s) \cdot \rho(t)$ für alle $s, t \in G$ gilt.

1.1.4 Bemerkung:

Sei V endlichdimensional und n sei seine Dimension.
Man nennt "n" dann Grad der linearen Darstellung.
Man nennt V auch Darstellungsraum der linearen Darstellung.

1.1.5 Bemerkung:

Sei (e_i) $i = 1,...,n$ Basis von V. So kann jeder Automorphismus $\rho(s)$ durch eine invertierbare Matrix $R(s)$ dargestellt werden.

Die Eigenschaft des Gruppenhomomorphismus enstpricht dann gerade der Matrixmultiplikation $R(s \cdot t) = R(s) \cdot R(t)$ für alle $s, t \in G$

Für die Matrixschreibweise lautet die Homomorphieeigenschaft:

$$r_{ik}(s \cdot t) = \sum_j r_{ij}(s) \cdot r_{jk}(t)$$

1.1.6 Def.:(Äquivalente Darstellung)

Seien $\rho : G \to GL(V)$ und $\rho' : G \to GL(V')$
zwei lineare Darstellungen.

Man nennt sie äquivalent (oder isomorph), wenn ein linearer Isomorphismus $t : V \to V'$ existiert, der ρ in ρ' transformiert.

1.1.7 Wiederholung (Transformation)

Identität $: t \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ t$ für alle $s \in G$

1.1.8 Bemerkung:

Falls ρ die Matrizenform $R(s)$ und ρ' die Matrizenform $R'(s)$ hat, so bedeutet das, dass eine invertierbare Matrix T exisitier mit:

$$T \cdot R(s) = R'(s) \cdot T \text{ für alle } s \in G$$

§1.2. Erste Beispiele

1.2.1 Beispiel A

Sei G eine beliebige Gruppe.

Sei C^* die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen komplexen Zahlen.

Dann wird eine lineare Darstellung $\rho : G \to C^*$ vom Grad 1 definiert, wenn man $\rho(s) = 1$ für jedes $s \in G$ setzt.

Diese lineare Darstellung nennt man die Einsdarstellung oder triviale Darstellung.

Beweis:

Sei $s, t \in G$ dann gilt $\rho(s) = 1$ und $\rho(s) = 1$, daher gilt

$\rho(s)\rho(s) = 1 = \rho(st)$

1.2.2 Beispiel B

Sei $G = S_n$, d.h. die Gruppe der bijektiven Abbildungen $s : (1,\ldots,n) \to (1,\ldots,n)$

Sei V ein $n-$dimensionaler Vektorraum und (e_i) eine Basis von V mit $i = 1\ldots n$.

Ist $s \in G$ eine Permutation, so wird mit $\rho(s)(e_i) = (e_{s(i)})$ eine lineare Darstellung $\rho : G \to GL(V)$ definiert.

Beweis:

Sei $s, t \in G$ dann gilt

$\rho(st)(e_i) = (e_{st(i)}) = (e_{s(t(i))}) = \rho(s)(e_{t(i)}) = \rho(s)\big(\rho(t)(e_i)\big) = \big(\rho(t)\rho(s)\big)(e_i)$

1.2.3 Beispiel C

Sei g die Ordnung der Gruppe G.

Sei $V = C[G]$ der Vektorraum der Abbildungen $f : G \to C$.

Spezielle Elemente von V:

Für $t \in G$ seien

$e_t(s) = \{1, \text{falls } s = t, 0 \text{ sonst}$

V besitze eine mit den Elementen t von G indizierte Basis $(e_t)_{t \in G}$

Für $s \in G$ sei $\rho(s)$ die Abbildung, die (e_t) in (e_{st}) transformiert, d.h. $\rho(s)(e_t) = e_{st}$

Dann wird durch $\rho : G \to GL(V)$ eine lineare Darstellung definiert, die man reguläre Darstellung nennt.

Beweis:

Sei $a, b \in G$ dann gilt

$\rho(ab)(e_t) = (e_{(ab)t}) = (e_{a(bt)}) = \rho(a)(e_{bt}) = \rho(a)(\rho(b)(e_t)) = (\rho(a)\rho(b))(e_i)$

§1.3 Teildarstellungen

1.3.1 Def.(Teildarstellung)

Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine lineare Darstellung.

Sei W ein linearer Untervektorraum von V, der invariant unter G ist, d.h. es gilt für alle $s \in G$:

aus $x \in W$ folgt $\rho(s)(x) \in W$.

Die Einschränkung $\rho(s)$ auf W ist dann ein Automorphismus $\rho^{w}: G \to GL(W)$ von W und es gilt: $\rho^{w}(s \cdot t) = \rho^{w}(s) \cdot \rho^{w}(t)$.

Die Einschränkung von $\rho(s)$ wird Teildarstellung (von ρ) auf W genannt.

1.3.2 Wiederholung (Direkte Summe)

Sei V ein Vektorraum und W, W' zwei Unter-vektorräume von V mit $W \cap W' = 0$ und $W \cup W' = V$.

Dann heißt V direkte Summe von W und W', wenn sich jedes $x \in V$ eindeutig in der Form

$$x = w + w' \text{ mit } w \in W \text{ und } w' \in W'$$

schreiben lässt.

1.3.3 Bemerkung.

Wenn V direkte Summe von W und W' ist schreibt man auch $V = W \oplus W'$
und bezeichnet W' als Komplement von W in V.

1.3.4 Def.(Projektor)

Die Abbildung p, die jedem $x \in V$ mit $x = w + w'$ ($w \in W, w' \in W'$) seine Komponente w zuordnet, heißt (zu der Zerlegung $V = W \oplus W'$ gehöriger) Projektor von V auf W.

1.3.5 Bemerkung

Das Bild von p ist W und für $x \in W$ folgt $p(x) = x$.

1.3.6 Satz 1:

Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine lineare Darstellung und W ein unter G invarianter linearer Unterraum von V.

Dann gibt es einen Komplement W^0 von W in V, das unter G invariant ist.

1.3.7 Beweis:

Sei W' ein beliebiges Komplement von W in V.

Sei p der Projektor von V auf W.

Wir bilden das "arithm. Mittel p^0 der

transformierten von p durch die Elemente von G" d.h.

$$p^0 = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\rho(t)\circ p \circ \rho(t)^{-1} (g \text{ Ordnung vov} \in \in - \text{n } G).$$

Wir zeigen:

1.) $p^0 : V \to W$

a) $p^0(V) \subseteq W$ b) $p^0(w) = w$

2.) Für alle $s \in G$ gilt $\rho(s)\circ p^0 = p^0 \circ \rho(s)$

Sei $W^0 = \mathrm{kern}(p^0)$. Dann ist $V = W \oplus W^0$, und nach 1.) ist

p^0 Projektion von V auf W bzgl. dieser Zerlegung.

Sei $v \in V$, dann gilt offenbar, $v = p^0(v) + v - p^0(v)$.

Hierbei ist $p^0(v) \in W$. Ferner ist $\left(v - p^0(v)\right) \in \mathrm{kern}(p^0) = W^0$

denn, $p^0(v - p^0(v)) = p^0(v) - p^0(v) = 0$.

Also ist $V = W + W^0$. Die Summe ist auch direkt,

d.h. $W \cap W^0 = \varnothing$ (Übung)

Nach 2.) ist W^0 invariant unter G. Sei $w^0 \in W^0$.

Für alle $s \in G$ ist zu Zeigen: $\rho(s)(w^0) \in W^0$.

Nach 2.) gilt $\left(p^0 \circ \rho(s)\right)(w^0) = \left(\rho(s)\circ p^0\right)(w^0) = \rho(s)(p^0(w^0)) = 0$

nach der Definition von W^0.

1a) für $v \in V$ gilt:

$$\left(\rho(t) \circ p \circ \rho(t)^{-1}\right)(v) = \rho(t)\left(p\left(\rho(t)^{-1}(v)\right)\right)$$

$\rho(t)^{-1}(v) \in V$, da ρ lineare Darstellung mit Darstellungsraum V.

$p\left(\rho(t)^{-1}(v)\right) \in W$, da p Projektion von V nach W.

$\rho(t)\left(p\left(\rho(t)^{-1}(v)\right)\right) \in W$, da $\rho(t)(w)$ invariant.

1b) für $w \in V$ gilt:

$$\left(\rho(t) \circ p \circ \rho(t)^{-1}\right)(w) = \rho(t)\left(p\left(\rho(t)^{-1}(w)\right)\right)$$

$\rho(t)^{-1}(w) \in W$, da $\rho(t)(w)$ invariant.

$p\left(\rho(t)^{-1}(w)\right) = \rho(t)^{-1}(w)$, da p Projektion von V nach W.

$\rho(t)\left(\rho(t)^{-1}(w)\right) = w$

Somit folgt $p^0(w) = \frac{1}{g}\sum_{t \in G} \rho(t) \circ p \circ \rho(t)^{-1}(w) = \frac{1}{g}\sum_{t \in G} w = \frac{1}{g} \cdot g \cdot w = w$

2.) Z.z. für alle $s \in G$ gilt $\rho(s) \circ p^0 = p^0 \circ \rho(s)$

Wir berechnen mit $s \in G$

$$\rho(s) \circ p^0 \circ \rho(s)^{-1} = \rho(s) \circ \left[\frac{1}{g}\sum_{t \in G} \rho(t) \circ p \circ \rho(t)^{-1}\right] \circ \rho(s)^{-1}$$

$$= \frac{1}{g}\sum_{t \in G} \rho(s) \circ \rho(t) \circ p \cdot \rho(t)^{-1} \circ \rho(s)^{-1}$$

$$= \frac{1}{g}\sum_{t \in G} \rho(s \cdot t) \circ p \circ \rho(s \cdot t)^{-1} = p^0$$

1.3.8 Bemerkung

Sei V die direkte Summe zweier unter G invarianter Untervektorräume W und W^0. So überträgt sich die eindeutige Projektionsaufspaltung
$x = w + w^0$ für ein $x \in V$ auf
$\rho(s)(x) = \rho(s)(w) + \rho(s)(w^0)$

Das heißt für $w \in W$ und $w^0 \in W^0$
gilt $\rho(s)(w) \in W$ und $\rho(s)(w^0) \in W^0$

Die lineare Darstellung von G in W und
die lineare Darstellung von G in W^0 bestimmt
also die lineare Darstellung von G in V.

§1.4 Irreduzible Darstellungen

1.4.1 Def. (Irreduzible Darstellung)

Eine lineare Darstellung $\rho : G \to GL(V)$ von G in V
heißt irreduzibel, falls kein echter, nicht trivialer Untervektorraum von V existiert, der invariant unter G ist.

1.4.2 Bemerkung

Eine irreduzible Darstellung kann nicht als direkte Summe zweier Teildarstellungen geschrieben werden.

1.4.3 Satz 2:

Jeder lineare Darstellung ist in eine direkte Summe irreduzibler Teildarstellungen zerlegbar.

1.4.4 Beweis (durch Induktion nach dim(V))

Sei ρ eine beliebige lineare Darstellung von G in den Darstellungsraum V. Wir setzen den

I.A. bei $\dim(V) = 1$

Für $\dim(V) = 1$ ist jeder Untervektorraum $U = V$ oder V selbst. Also ist ρ bereits irreduzibel. ok.

I.Annahme.: Jede lineare Darstellung mit $\dim(V) < n$ ist in irreduzible Teildarstellungen zerlegbar .

I.S.: Sei ρ jetzt eine beliebige lineare Darstellung mit $\dim(V) = n \geq 1$.

Dann ist ρ entweder bereits irreduzibel, (dann ist nichts zu beweisen) oder es existieren nach Satz1 zwei echte Unterräume V' und V'' von V mit $V = V' \oplus V''$, die invariant unter G sind.

Hierbei ist $\dim(V') < \dim(V)$ und $\dim(V'') < \dim(V)$

Nach I.V. ist $V' = V'_1 \oplus .... \oplus V'_r$ und $V'' = V''_1 \oplus .... \oplus V''_s$ mit irreduziblen V'_j und V''_j

Somit ist $V = V'_1 \oplus .... \oplus V'_r \oplus V''_1 \oplus .... \oplus V''_s$

§1.5 Tensorprodukt

1.5.1 Wiederholung (Tensorprodukt von Vektorräumen)

Seien V_1 und V_2 zwei Vektorräume.
Ein Vektorraum W zusammen mit einer Abbildung von $V_1 \times V_2$ nach W mit $(x_1, x_2) \to x_1 \otimes x_2$ heißt Tensorprodukt von V_1 und V_2, wenn die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:

1)Das Produkt $x_1 \otimes x_2$ ist linear in beiden Argumenten.

2) Für zwei Basen $(e_{i,1})$ $(i = 1,...,\dim(V_1))$ von V_1 und $(e_{j,2})$ $(j = 1,...,\dim(V_2))$ von V_2, ist $e_{i,1} \otimes e_{j,2}$ eine Basis von W.
Man schreibt auch $W = V_1 \otimes V_2$

1.5.2 Definition (Tensorprodukt von linearen Darstellungen)

Seien $\rho^1 : G \to GL(V_1)$ und $\rho^2 : G \to GL(V_2)$ zwei gegebene lineare Darstellungen einer Gruppe G.

Für jedes $s \in G$ definiere $\rho(s)$ aus $GL(V_1 \otimes V_2)$:

$\rho(s)(x_1 \otimes x_2) = \rho(s)^1(x_1) \otimes \rho(s)^2(x_2)$ für alle $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$

Man schreibt auch : $\rho(s) = \rho(s)^1 \otimes \rho(s)^2$

Pr oposition

Die Abbildung $\rho : G \to GL(V_1 \otimes V_2)$ definiert einen lineare Darstellun g. Sie heißt Tensorprod ukt der gegebenen linearen Darstellun gen $\rho^1 : G \to GL(V_1)$ und $\rho^2 : G \to GL(V_2)$.

1.5.3 Bemerkung (Tensorprodukt in Matrizenform)

In Matrixschreibweise lässt sich ebenfalls das Tensorprodukt formulieren.

Seien zwei Basen (e_{i_1}) von V_1 und (e_{i_1}) von V_1 zusammen mit den zugehörigen Matrixformen $r_{i_1,j_1}(s)$ von $\rho^1(s)$ und (r_{i_2,j_2}) von $\rho^1(s)$ gegeben.

Das Bild eines Basisvektors von $V_1 \otimes V_2$ ist dann gegeben durch :

$$\rho(s)(e_{j_1} \cdot e_{j2}) = \sum_{i_1} r_{i1,j1}(s) \cdot r_{i2,j2}(s) \cdot e_{i1} \cdot e_{i2}$$

wegen

$$\rho^1(s)(e_{j_1}) = \sum_{i_1} r_{i1,j1}(s) \cdot e_{i1} \text{ und } \rho^2(s)(e_{j2}) = \sum_{i_{21}} r_{i2,j2}(s) \cdot e_{i2}$$