CHAPTER 2

-

Darstellungstheorie

2.1 Der Charakter einer Darstellung

Spur einer Matrix

Sei V ein Vektorraum mit der n-elementigen Basis (e_i) und sei a eine lineare Abbildung von V in sich selbst mit der Matrix (a_{ij}). Mit Spur wird folgender Skalar bezeichnet, wobei λ_i der i-te Eigenwert von a ist (mit Multiplizität gezählt):

$$Tr(a) = \sum_i a_{ii} = \sum_i \lambda_i$$

Charakter einer Darstellung

Sei ρ: G$\rightarrow$GL(V) eine lineare Abbildung der endlichen Gruppe G in den Vektorraum V. Der Charakter von ρ ist für $s \in G$ folgende Funktion χ_ρ:

$$\chi_\rho : G \rightarrow GL(V) \qquad \chi_\rho(s) = Tr(\rho(s)) = Tr(\rho_s)$$

Proposition 1: Eigenschaften des Charakters

Sei χ Charakter einer Darstellung p des Grades n. Seien s,t∈G. Es gilt Folgendes:

i. $\chi(1) = n$
ii. $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$
iii. $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$

Proposition 2: Charakter von Summe und Produkt

Seien $\rho^1: G \to GL(V_1)$ und $\rho^2: G \to GL(V_2)$ zwei lineare Darstellungen von G, χ_1 und χ_2 seien ihre Charaktere. Dann gilt für direkte Summe und Tensorprodukt Folgendes:

i. $\chi_{\rho^1 \oplus \rho^2} = \chi_{\rho^1} + \chi_{\rho^2}$

ii. $\chi_{\rho^1 \otimes \rho^2} = \chi_{\rho^1} \cdot \chi_{\rho^2}$

Vorbereitung Proposition 3: Symmetrisches und alternierendes Quadrat

Sei V Vektorraum mit Basis $e_1, \ldots, e_n$. Dann hat $V \otimes V$ die Basis $e_i \otimes e_j \; (1 \leq i, j \leq n)$.

Definition:
Sei $Sym^2(V)$ definiert als der Unterraum von $V \otimes V$ mit der Basis $e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i \; (1 \leq i \leq j \leq n)$.

Sei $Alt^2(V)$ definiert als der Unterraum von $V \otimes V$ mit der Basis $e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i \; (1 \leq i < j \leq n)$.

Satz:
i. Es gilt: $V \otimes V = Sym^2(V) \oplus Alt^2(V)$
ii. Sym^2(V) und Alt^2(V) sind G-invariant.

Proposition 3: Symmetrisches und alternierendes Quadrat

Sei ρ: G → GL(V) eine lineare Darstellung von G und sei χ ihr Charakter. χ_σ^2 und χ_α^2 seien die Charaktere von symmetrischem Quadrat $\mathrm{Sym}^2(V)$ und alternierendem Quadrat $\mathrm{Alt}^2(V)$. So gilt:

i. $\chi_\sigma^2(s)=\frac{1}{2}\left(\chi(s)^2+\chi(s^2)\right)$

ii. $\chi_\alpha^2(s)=\frac{1}{2}\left(\chi(s)^2-\chi(s^2)\right)$

iii. $\chi_\sigma^2(s)+\chi_\alpha^2(s)=\chi^2(s)$

2.2 Lemma von Schur

Proposition 4: Lemma von Schur

Seien $\rho^1: G \to GL(V_1)$ und $\rho^2: G \to GL(V_2)$ zwei irreduzible Darstellungen von G und sei f eine lineare Abbildung von V_1 in V_2, sodass $\rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1$ für $s \in G$. Dann gilt:

i. ρ^1 und ρ^2 nicht isomorph => $f=0$

ii. $V_1=V_2$ und $\rho^1=\rho^2$ => f ist skalares Vielfaches von id

Korollar 1

Sei h eine lineare Abbildung von V_1 nach V_2 und sei $h^0 = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} (\rho_t^2)^{-1} h \rho_t^1$ gesetzt:

i. ρ^1 und ρ^2 nicht isomorph => $h^0 = 0$

ii. $V_1 = V_2$ und $\rho^1 = \rho^2$ => h^0 ist eine Multiplikation mit Faktor $(1/dim(V_1))Tr(h)$

Vorbereitung Korollar 2/3

Sei $t \in G$ und seien ρ^1 und ρ^2 in Matrixform gegeben:

$$\rho_t^1 : \left(r_{ij}^1(t)\right)_{1 \leq i, j \leq n} \qquad \rho_t^2 : \left(r_{ij}^2(t)\right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Die lineare Abbildung h sei durch die Matrix $\left(x_{i_2 i_1}\right)$ definiert. Dann gilt für die Matrix $\left(x_{i_2 i_1}^0\right)$ von h^0:

$$\left(x_{i_2 i_1}^0\right) = \frac{1}{g} \sum_{t, j_1, j_2} r_{i_2 j_2}^2\left(t^{-1}\right) x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}^1(t)$$

Korollar 2/3

i. ρ^1 und ρ^2 nicht isomorph

=> $\frac{1}{g}\sum_{t\in G} r^2_{i_2 j_2}(t^{-1}) r^1_{j_1 i_1}(t) = 0$ für beliebige i_1, i_2, j_1, j_2

ii. $V_1=V_2$ und $\rho^1=\rho^2$, beide mit gleicher Matrix $\left(r_{ij}(t)\right)_{1\le i,\, j\le n}$

=> $\frac{1}{g}\sum_{t\in G} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) r_{j_1 i_1}(t) = \frac{1}{dim(V_1)}\delta_{i_2 i_1}\delta_{j_2 j_1}$

Definition:

Setze $\langle \Phi, \Psi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \Phi(t) \overline{\Psi(t)}$.

Eigenschaft: Falls Ψ Charakter ist, gilt $\overline{\Psi(t)} = \Psi(t^{-1})$

und $\langle \Phi, \Psi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \Phi(t) \Psi(t^{-1})$.

Bemerkung

Damit verkürzen sich die beiden letzten Aussagen zu:

i. ρ^1 und ρ^2 nicht isomorph

=> $\langle r_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = 0$

ii. $V_1 = V_2$ und $\rho^1 = \rho^2$, beide mit gleicher Matrix $\left(r_{ij}(t)\right)_{1 \leq i, j \leq n}$

=> $\langle r_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = \frac{1}{dim(V_1)} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1}$

2.3 Orthogonalitätsrelationen für Charaktere

Vorbereitung Theorem 3

Seien Φ und Ψ zwei komplexwertige Funktionen auf G. Ein Skalarprodukt wurde folgendermaßen definiert (wobei g die Ordnung von G ist):

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \Phi(t) \overline{\Psi(t)}$$

Für $\tilde{\Psi}(t) := \overline{\Psi(t^{-1})}$ gilt (beachte: ist Ψ Charakter, dann ist $\tilde{\Psi}(t) = \Psi(t)$):

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \Phi(t) \tilde{\Psi}(t^{-1})$$

Theorem 3

i. Sei χ der Charakter einer irreduziblen Darstellung, so ist $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

ii. Seien χ und χ' Charaktere zweier irreduzibler nicht-isomorpher Darstellungen, so ist $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$.

Theorem 4

Sei ρ: G $\rightarrow$ GL(V) eine lineare Darstellung mit Charakter Φ. Sei $V = W_1 \oplus ... \oplus W_k$ eine Zerlegung in irreduzible Darstellungen.
Sei W eine irreduzible Darstellung mit Charakter χ, so ist die Anzahl der zu W isomorphen W_i gleich dem Skalarprodukt $\langle \Phi, \chi \rangle$.

Korollar 1/2

i. Die Anzahl der zu W isomorphen W_i hängt nicht von der gewählten Zerlegung ab.

ii. Zwei Darstellungen mit gleichem Charakter sind isomorph.

Theorem 5

Sei Φ der Charakter einer Darstellung V, so gilt $\langle \Phi, \Phi \rangle$ ist eine positive ganze Zahl, und es gilt

$\langle \Phi, \Phi \rangle = 1$ genau dann, wenn V irreduzibel ist.

Literatur

- Jean-Pierre Serre, Representations of finite groups. Springer 1977, Graduate Texts in Mathematics 42, S.10-17

<u>Beweise</u>

Bemerkung (Spur einer Matrix):

$$ch_a(x)=det(x\cdot I_n-a)=x^n-t\cdot x^{n-1}\pm\ldots\pm t^n\cdot d=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i) \qquad \lambda_1,\ldots,\lambda_n \, sind\, die\, EW$$

$$t=Tr(a) \quad , \quad d=det(a)$$

Proposition 1:

i. Sei $\rho(1)=1$, so gilt $\chi(\rho(1))=Tr(\rho(1))=Tr(1)=dim(V)=n$.

ii. $\overline{\chi_\rho(s)}=\sum_i \overline{\lambda_i}=\sum_i \lambda_i^{-1}=Tr(\rho(s)^{-1})=Tr(\rho(s^{-1}))=\chi_\rho(s^{-1})=\chi_\rho(s^{-1})$

Erläuterung zu $\overline{\lambda_i}=\lambda_i^{-1}$:

Da G endlicher Ordnung, gilt $\rho(s)^N=1$ für geeignetes N.

Daher: Ist λ EW von $\rho(s)$, dann gilt $\lambda^N=1$

(denn $T^{-1}\rho(s)T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}$, $\quad (T^{-1}\rho(s)T)^N=T^{-1}\rho(s)^N T=1$).

Insbesondere gilt $|\lambda|=1$, $\quad 1=|\lambda|^2=\overline{\lambda}\lambda$, d.h. $\overline{\lambda}=\frac{1}{\lambda}=\lambda^{-1}$.

iii. Seien $s,t\in G$. Seien $u:=ts$ und $v:=t^{-1}$, so gilt aufgrund der Kommutativität der Spur:

$$Tr(tst^{-1})=Tr(uv)=Tr(vu)=Tr(t^{-1}ts)=Tr(s)$$

Proposition 2:

i. Sei $s\in G$ und seien ρ^1 und ρ^2 in Matrizenform als R_s^1 und R_s^2 gegeben.

Dann gilt für die Matrix R_s von $V_1\oplus V_2$: $R_s=\begin{pmatrix}R_s^1 & 0\\ 0 & R_s^2\end{pmatrix}$

Für die Spur gilt somit: $Tr(R_s) = Tr(R_s^1) + Tr(R_s^2)$

Damit gilt für die Charaktere: $\chi_{\rho^1 \oplus \rho^2}(s) = \chi_{\rho^1}(s) + \chi_{\rho^2}(s)$

ii. Seien ρ^1 und ρ^2 erneut in Matrixform gegeben und sei $s \in G$.

Ihre Charaktere seien $\chi_{\rho^1}(s) = \sum_{i_1} r_{i_1 i_1}(s)$ und $\chi_{\rho^2}(s) = \sum_{i_2} r_{i_2 i_2}(s)$.

Für das Tensorprodukt gilt Folgendes:

$$\chi_{\rho^1 \otimes \rho^2} = \sum_{i_1, i_2} r_{i_1 i_1}(s) r_{i_2 i_2}(s) = \sum_{i_1} r_{i_1 i_1}(s) \sum_{i_2} r_{i_2 i_2}(s) = \chi_{\rho^1} \cdot \chi_{\rho^2}$$

Proposition 3:

Sei $s \in G$. Es werde eine Basis (e_i) aus Eigenvektoren von V gewählt. Dann gilt für den Charakter: $\chi(s) = \sum_i \lambda_i \quad \chi(s^2) = \sum_i \lambda_i^2$

(Denn: Die Matrix von $\rho(s)$ bzgl. der Basis (e_i) ist gleich

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Dann ist die Matrix von $\rho(s^2)$ gleich $\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$.

Damit ist $\chi(s^2) = Tr(\rho(s^2)) = \sum_i \lambda_i^2$.)

i. Der Charakter des symmetrischen Quadrats lässt sich nun wie folgt berechnen:

Sei $e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i \quad (1 \leq i \leq j \leq n)$ die Basis von Sym^2(V). Dann ist

$$(\rho_s \otimes \rho_s)(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i) = (\rho_s \otimes \rho_s)(e_i \otimes e_j) + (\rho_s \otimes \rho_s)(e_j \otimes e_i) = \rho_s(e_i) \otimes \rho_s(e_j) + \rho_s(e_j) \otimes \rho_s(e_i)$$

$$\rho_s(e_i) \otimes \rho_s(e_j) + \rho_s(e_j) \otimes \rho_s(e_i) = \lambda_i e_i \otimes \lambda_j e_j + \lambda_j e_j \otimes \lambda_i e_i = \lambda_i \lambda_j (e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i).$$

Somit gilt für den Charakter:

$$\chi_\sigma^2(s)=\sum_{i\leq j}\lambda_i\lambda_j=\sum_{i=j}\lambda_i\lambda_j+\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j=\sum_i\lambda_i^2+\frac{1}{2}(\sum_i\lambda_i)^2-\frac{1}{2}(\sum_i\lambda_i^2)$$

(Denn nach dem bin. Lehrsatz gilt $(\sum_i\lambda_i)^2=\sum_i\lambda_i^2+2\cdot\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j$.)

Dies lässt sich zusammenfassen zu $\chi_\sigma^2(s)=\frac{1}{2}(\chi(s)^2+\chi(s^2))$.

ii. Für das alternierende Quadrat gilt:

Sei $e_i\otimes e_j-e_j\otimes e_i \quad (1\leq i<j\leq n)$ die Basis von Sym^2(V). Dann ist

$$(\rho_s\otimes\rho_s)(e_i\otimes e_j-e_j\otimes e_i)=(\rho_s\otimes\rho_s)(e_i\otimes e_j)-(\rho_s\otimes\rho_s)(e_j\otimes e_i)=\rho_s(e_i)\otimes\rho_s(e_j)-\rho_s(e_j)\otimes\rho_s(e_i)$$

$$\rho_s(e_i)\otimes\rho_s(e_j)-\rho_s(e_j)\otimes\rho_s(e_i)=\lambda_i e_i\otimes\lambda_j e_j-\lambda_j e_j\otimes\lambda_i e_i=\lambda_i\lambda_j(e_i\otimes e_j-e_j\otimes e_i).$$

Somit gilt für den Charakter:

$$\chi_\alpha^2(s)=\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j=\frac{1}{2}(\sum_i\lambda_i)^2-\frac{1}{2}(\sum_i\lambda_i^2)=\frac{1}{2}(\chi(s)^2-\chi(s^2))$$

iii. Damit gilt für ihre Summe:

$$\chi_\sigma^2(s)+\chi_\alpha^2(s)=\frac{1}{2}(\chi(s)^2+\chi(s^2))+\frac{1}{2}(\chi(s)^2-\chi(s^2))=\chi(s)^2$$

Proposition 4:

i. Sei $f\neq 0$. Sei W_1 der Kern von f. Wir zeigen, dass W_1 invariant ist. Dazu sei $x\in W_1$.

Dann gilt $(f\circ\rho_s^1)(x)=(\rho_s^2\circ f)(x)=\rho_s^2(f(x))=0$.

Daraus folgt, dass $\rho_s^1(x)\in W_1$.

Somit ist W_1 unter G invariant.

V_1 ist irreduzibel, damit gilt $W_1=V_1$ oder $W_1=0$.

Der erste Fall entfällt, da hieraus f=0 folgt, was der Voraussetzung $f\neq 0$ widerspricht. Damit ist f injektiv.

Äquivalent ergibt sich für das Bild W_2 von f: $W_2=V_2$.

Damit ist f surjektiv.

Also ist f ein Isomorphismus von V_1 auf V_2.

ii. Seien $V_1=V_2$ und $\rho^1=\rho^2$. λ sei Eigenwert von f (Eigenwert ist Existent, da $\mathbb{C}$ der Skalarkörper ist). Sei $f':=f-\lambda\cdot id$ gesetzt. λ ist Eigenwert, somit ist $Kern(f')\neq 0$.

Nach Voraussetzung gilt $\rho_s^2\circ f'=f'\circ\rho_s^1$. Dies ist nur erfüllt für $f'=0$ (nach Teil i, denn wenn $f'\neq 0$ dann ist $Kern(f')=0$). Damit gilt $f'=f-\lambda\cdot id=0$ d.h. $f=\lambda\cdot id$, d.h. f ist skalares Vielfaches.

Korollar 1:

i. Zunächst wird $\rho_s^2 h^0=h^0\rho_s^1$ überprüft. Dies folgt aus:

$$(\rho_s^2)^{-1}h^0\rho_s^1=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}(\rho_s^2)^{-1}(\rho_t^2)^{-1}h\rho_t^1\rho_s^1=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}(\rho_{ts}^2)^{-1}h\rho_{ts}^1=h^0$$

Damit gilt nach dem „Schurschen Lemma" für ρ^1 und ρ^2 nicht isomorph $h^0=0$.

ii. Zunächst gilt für die Spur von h^0:

$Tr(h^0)=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}Tr((\rho_t^2)^{-1}h\rho_t^1)=Tr(h)$ (Denn: Nach Vor. ist $\rho_s^1=\rho_s^2$.

Damit ist $(\rho_t^2)^{-1}h\rho_t^1=(\rho_t^1)^{-1}h\rho_t^1=h$.)

Das „Schursche Lemma" besagt für $V_1=V_2$ und $\rho^1=\rho^2$, $h^0=\lambda\cdot id$.

Damit gilt $Tr(h)=Tr(h^0)=Tr(\lambda\cdot id)=dim(V_1)\cdot\lambda$, d.h. $\lambda=\frac{Tr(h)}{dim(V_1)}$.

Korollar 2/3:

i. $x^0_{i_2 i_1}=\frac{1}{g}\sum_{t,j_1,j_2} r_{i_2 j_2}(t^{-1})x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(t)$ ist linear in $x_{j_2 j_1}$. Für ρ^1 und ρ^2 nicht isomorph gilt nach Kor.1 $x^0_{i_2 i_1}=0$ für jedes mögliche $x_{j_2 j_1}$. Somit gilt die Behauptung.

ii. Im Fall $V_1=V_2$ und $\rho^1=\rho^2$ gilt $h^0=\lambda\cdot id$. Wir wählen eine beliebige Matrix $X=(x_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.
Damit ist nach Kor.1 $(x^0_{i_2 i_1})=\lambda\,\delta_{i_2 i_1}$, wobei $\delta_{i_2 i_1}$ Kronecker-Delta ist und $\lambda=\frac{\sum_{i_1} x_{i_1 i_1}}{dim(V_1)}$. Damit gilt:

$$\frac{1}{g}\sum_{t,j_1,j_2} r_{i_2 j_2}(t^{-1})x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(t)=\frac{1}{dim(V_1)}\sum_{j_1 j_2}\delta_{i_2 i_1}\delta_{j_2 j_1}x_{j_2 j_1}.$$

Wir können beide Seiten als Polynome auffassen. Ein Koeffizientenvergleich ergibt die Behauptung.

Theorem 3:

i. Sei $\rho: G\rightarrow GL(V)$ eine irreduzible Darstellung mit Charakter χ und Matrixform sei $(r_{ij}(t))$. Dann gilt $\chi(t)=\sum_i r_{ii}(t)$. Hieraus folgt zusammen mit Korollar 3:

$$\langle\chi,\chi\rangle=\sum_{i,j}\langle r_{ii},r_{jj}\rangle=\frac{\sum_{i,j}\delta_{ij}}{dim(V)}=\frac{dim(V)}{dim(V)}=1$$ (denn: $\sum_{i,j}\delta_{ij}=\sum_i 1$)

ii. Seien ρ und ρ' irred. Darstellungen mit Charakteren χ und χ' und Matrixformen $(r_{ij}(t))$ und $(r_{ij}'(t))$.

Gemäß Korollar 2 gilt:

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \sum_{i,j} \langle r_{ii}, r_{jj}' \rangle = 0$$

Theorem 4:

Sei χ_i der Charakter von W_i.

Nach Proposition 2 gilt: $\Phi = \chi_1 + \ldots + \chi_k$

Somit gilt aufgrund der Linearität des Skalarprodukts:

$\langle \Phi, \chi \rangle = \langle \chi_1, \chi \rangle + \ldots + \langle \chi_k, \chi \rangle$

Nach Theorem 3 gilt $\langle \chi_i, \chi \rangle = 1$ bzw. $\langle \chi_i, \chi \rangle = 0$ für W_i isomorph zu W bzw. W_i nicht isomorph zu W. Daraus folgt die Behauptung.

Korollar 1/2:

i. Die Formel für die Anzahl ist unabhängig von der gewählten Zerlegung.
ii. Nach Korollar 1 enthalten zwei isomorphe Darstellungen jede irreduzible Darstellung der Zerlegung gleich oft. Hieraus kann die Behauptung leicht gefolgert werden.

Theorem 5:

Sei $V = m_1 W_1 \oplus \ldots \oplus m_h W_h$ mit $m_i \in \mathbb{N}_0$ (wobei mW Abkürzung für $\underbrace{W \oplus \ldots \oplus W}_{m-mal}$ ist) Zerlegung von V. χ_i sei der Charakter von W_i.

Dann gilt $m_i = \langle \Phi, \chi_i \rangle$. Damit gilt $\langle \Phi, \Phi \rangle = \sum_i m_i^2 \geq 1$

(denn: $\langle\Phi,\Phi\rangle=\langle\Phi,\sum_i m_i\chi_i\rangle=\sum_i m_i\langle\Phi,\chi_i\rangle=\sum_i m_i m_i$). Somit kann $\langle\Phi,\Phi\rangle=1$ nur gelten, wenn ein $m_i=1$ und alle anderen $m_j=0$ mit $j\neq i$. Dies ist äquivalent zur Irreduzibilität.