Character Theory
2.4 – 2.7

Bezeichnungen

Von nun an werden mit $\chi_1,...,\chi_h$ die verschiedenen Charaktere der irreduziblen Darstellungen von G und mit $n_1,...,n_h$ ihre Grade bezeichnet (nach Prop.1 gilt dann $n_i=\chi_i(1)$).

2.4 Zerlegung der regulären Darstellung

Proposition 5

Sei R die reguläre Darstellung von G. Der Charakter φ von R wird durch die Formeln

- $\varphi(1) = g = Ordnung\ von G$
- $\varphi(s) = 0, wenn\ s \neq 1$

gegeben.

Erinnerung: R hat eine Basis $(e_t)_{t \in G}$ mit $\rho_s\ e_t = e_{st}$.

Korollar 1

Jede irreduzible Darstellung W_i ist in der regulären Darstellung so oft enthalten, wie ihr Grad n_i angibt.

Korollar 2

Die Grade n_i genügen der Beziehung $\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = g$.

Bemerkung

Angenommen man suche die irreduziblen Darstellungen einer gegebenen Gruppe G und habe bereits paarweise inäquivalente irreduzible Darstellungen der Grade $n_1,...,n_k$ konstruiert, dann ist notwendig und hinreichend dafür, dass dies (bis auf Äquivalenz) alle irreduziblen Darstellungen von G sind, dass $n_1^2+...+n_k^2=g$ gilt.

2.5 Anzahl der irreduziblen Darstellungen

Proposition 6

Sei f eine Klassenfunktion auf G (d.h. $f(tst^{-1})=f(s)$ für alle $s,t\in G$) und sei $\rho:G\rightarrow GL(V)$ eine lineare Darstellung von G. ρ_f sei die lineare Abbildung von V in sich selbst, die durch die folgende Formel definiert ist:

$$\rho_f=\sum_{t\in G} f(t)\rho_t$$

Wenn V irreduzibel vom Grad n ist und zum Charakter χ gehört, so ist ρ_f eine Multiplikation mit dem Faktor

$$\lambda=\frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t)\chi(t)=\frac{g}{n}\langle\bar{f},\chi\rangle$$

Bezeichnung

Sei H der Vektorraum der Klassenfunktionen auf G. Die Charaktere $\chi_1,\ldots,\chi_h$ der irreduziblen Darstellungen von G sind Elemente von H.

Wiederholung

Zwei Elemente t und t' von G heißen konjugiert, wenn ein $s \in G$ mit $t' = sts^{-1}$ existiert. Diese Äquivalenzrelation bewirkt eine Klasseneinteilung. Diese Äquivalenzklassen heißen Konjugationsklassen.

Theorem 6

Die Charaktere $\chi_1,\ldots,\chi_h$ bilden eine Orthonormalbasis von H.

Theorem 7

Die Anzahl der irreduziblen Darstellungen von G (bis auf Äquivalenz) ist gleich der Anzahl der Klassen konjugierter Elemente von G.

Proposition 7

Sei $s \in G$ und sei c_s die Elementanzahl der Klasse konjugierter Elemente, der s angehört.

Dann gilt:

a) $$\sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(s)} \chi_i(s) = \frac{g}{c_s}$$

b) $$\sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(s)} \chi_i(t) = 0$$ (für $t \in G$ nicht konjugiert zu s)

2.6 Die kanonische Zerlegung einer Darstellung

Vorbereitung Theorem 8

Sei $\rho: G \rightarrow GL(V)$ eine lin. Darstellung von G. Wir definieren nun eine direkte Summenzerlegung V, die weniger „fein“ als die Zerlegung in irreduzible Darstellungen ist, aber dafür eindeutig ist. Seien $\chi_1,\ldots,\chi_h$ die Charaktere der irreduziblen Darstellungen $W_1,\ldots,W_h$ von G und $n_1,\ldots,n_h$ ihre Grade. $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ sei Zerlegung von V als direkte Summe irreduzibler Darstellungen. Mit V_i sei nun die direkte Summe der zu W_i äquivalenten $U_1,\ldots,U_m$ bezeichnet. Dann wird mit der *kanonischen Zerlegung* $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_h$ bezeichnet.

Theorem 8

a) Die Zerlegung $V = V_1 \oplus ... \oplus V_h$ hängt nicht von der ursprünglich gewählten Zerlegung in irreduzible Darstellungen ab.

b) Der zu dieser Zerlegung gehörige Projektor p_i von V auf V_i wird durch die Formel

$$p_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \overline{\chi_i(t)} \rho_t$$

gegeben.

Beispiel

Sei G die zweielementige Gruppe {1,s} mit $s^2=1$. Sie besitzt zwei irreduzible Darstellungen des Grades 1, W^1 und W^2, die $\rho_s=+1$ und $\rho_s=-1$ entsprechen. Die kanonische Zerlegung einer Darstellung V lautet somit $V=V_1\oplus V_2$.

V_1 wird von den $x\in V$ gebildet, die symmetrisch sind ($\rho_s x=x$), V_2 von denen, die antisymmetrisch sind ($\rho_s x=-x$). Die entsprechenden Projektoren sind:

$$p_1 x=\frac{x+\rho_s x}{2} \qquad p_2 x=\frac{x-\rho_s x}{2}$$

2.7 Explizite Zerlegung einer Darstellung

Vorbereitung Proposition 8

Sei $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_h$ die kanonische Zerlegung einer gegebenen Darstellung (d.h. V_i ist die Summe aller irred. Teilräume V, die zu W_i isomorph sind).
Sei W_i in Matrixform als $(r_{\alpha\beta}(s))$ mit Basis $(e_1,\ldots,e_n)$ gegeben. Außerdem sei $n_i=\dim(W_i)$.
Dann ist $\chi_i(s) = \sum_\alpha r_{\alpha\alpha}(s)$.
Für jedes Paar ganzer Zahlen $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ sei $p_{\alpha\beta}$ die lineare Abbildung von V in sich selbst definiert durch

$$p_{\alpha\beta} = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} r_{\beta\alpha}(t^{-1}) \rho_t .$$

Proposition 8 (1)

a) Die Abbildung $p_{\alpha\alpha}$ ist eine Projektion. Sie verschwindet auf den V_j mit $j \neq i$. Ihr Bild $V_{i,\alpha}$ ist in V_i enthalten und V_i ist die direkte Summe der $V_{i,\alpha}$ für $1 \leq \alpha \leq n$. Wir haben $p_i = \sum_{\alpha} p_{\alpha\alpha}$.

b) Die Abbildung $p_{\alpha\beta}$ verschwindet auf den V_j mit $j \neq i$ sowie auf den $V_{i,\gamma}$ für $\gamma \neq \beta$. Sie ist ein Isomorphismus von $V_{i,\beta}$ auf $V_{i,\alpha}$.

Proposition 8 (2)

c) Sei $x_1 \neq 0$ ein Element aus $V_{i,1}$ und sei $x_\alpha = p_{\alpha 1}(x_1) \in V_{i,\alpha}$. Die x_α sind linear unabhängig und erzeugen einen Untervektorraum $W(x_1)$ der Dimension n. Für jedes $s \in G$ ist $\rho_s(x_\alpha) = \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)\, x_\beta$.

d) Wenn $\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)}\right)$ eine Basis von $V_{i,1}$, so ist die Darstellung V_i die direkte Summe der Unterdarstellungen $W\left(x_1^{(1)}\right), \ldots, W\left(x_1^{(m)}\right)$ definiert in c).

Beweis Proposition 5

Sei $t \in G$, so gilt $\rho_s(e_t) = \sum_{t' \in G} e_{t'} R_{t't}$ mit $R_{t't} \in \mathbb{C}$.

Damit gilt für die Spur: $Tr(\rho_s) = \sum_{t \in G} R_{tt}$

Für die reguläre Darstellung gilt $\rho_s(e_t) = e_{st}$, d.h. $R_{t't} = \begin{Bmatrix} 1, t' = st \\ 0\, sonst \end{Bmatrix}$.

Also $R_{tt} = \begin{Bmatrix} 1, t = st \\ 0\, sonst \end{Bmatrix}$.

Ist $s \neq 1$, so gilt auch $st \neq t$ für alle t . Damit gilt $Tr(\rho_s) = 0$.

Ist $s = 1$, so gilt $Tr(\rho_s) = Tr(1) = dim(R) = g$.

Beweis Korollar 1

Nach Theorem 4 ist die Anzahl gleich $\langle \varphi, \chi_i \rangle$, wobei φ und χ_i Charaktere von R und W_i . Hierfür gilt:

$$\langle \varphi, \chi_i \rangle = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \overline{\varphi(s)}\, \chi_i(s) = \frac{1}{g} \cdot g\, \chi_i(1) = \chi_i(1) = n_i$$

Beweis Korollar 2

Nach Kor. 1 ist $\varphi = \sum n_i \chi_i$. Somit gilt für die Grade $g = \sum n_i n_i = \sum n_i^2$.

Beweis Proposition 6

Zunächst berechnen wir $\rho_s^{-1} \rho_f \rho_s$: $\rho_s^{-1} \rho_f \rho_s = \sum_{t \in G} f(t) \rho_s^{-1} \rho_t \rho_s = \sum_{t \in G} f(t) \rho_{s^{-1} t s}$

Setze $u = s^{-1} t s$, so ergibt sich $\rho_s^{-1} \rho_f \rho_s = \sum_{u \in G} f(s u s^{-1}) \rho_u = \sum_{u \in G} f(u) \rho_u = \rho_f$.

Somit gilt $\rho_f \rho_s = \rho_s \rho_f$. Damit gilt nach dem „Schurschen Lemma“

$\rho_f=\lambda\cdot id$. Für die Spur von ρ_f gilt somit

$Tr(\rho_f)=Tr(\sum_{t\in G} f(t)\rho_t)=\sum_{t\in G} f(t)Tr(\rho_t)=\sum_{t\in G} f(t)\chi(t)=\lambda\cdot n$, d.h. $\lambda=\frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t)\chi(t)=\frac{g}{n}\langle\bar{f},\chi\rangle$.

<u>Beweis Theorem 6</u>

Nach Theorem 3 gilt $\langle\chi_i,\chi_i\rangle=1$ und $\langle\chi_i,\chi_j\rangle=0$ mit $1\leq i,j\leq h$ und $i\neq j$. Somit bilden $\chi_1,\dots,\chi_h$ ein Orthonormalsystem in H.

Wir prüfen nun die Vollständigkeit, indem wir zeigen, dass jedes zu χ_i orthogonale Element von H verschwindet. Sei f ein solches Element. Sei $\varphi: G\rightarrow GL(V)$ eine beliebige Darstellung. Für die Darstellung $\rho: G\rightarrow GL(V)$ setzen wir $\rho_{\bar{f}}=\sum_{t\in G}\overline{f(t)}\rho_t$. Da f zu den χ_i orthogonal ist, ist nach Prop. 6 $\rho_{\bar{f}}=0$ (denn: $\rho_{\bar{f}}=(\frac{g}{n}\langle f,\chi\rangle)\cdot id=0$), wenn V irreduzibel. Durch Zerlegung von V in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen gilt stets $\rho_{\bar{f}}=0$. Nun wählen wir für V die reguläre Darstellung. Sei $(e_{1,\dots},e_n)$ die Basis von V, sodass $\rho_s e_t=e_{st}$ für alle $s,t\in G$.

Nun berechnen wir die Transformierte des Basisvektors e_1:

$\rho_{\bar{f}}e_1=\sum_{t\in G}\overline{f(t)}\rho_t e_1=\sum_{t\in G}\overline{f(t)}e_t$

Da $\rho_{\bar{f}}=0$, muss $\sum_{t\in G}\overline{f(t)}e_t=0$. Weil e_t aus der Basis ist, gilt $\overline{f(t)}=0$ für alle $t\in G$. Damit ist $f=0$.

Beweis Theorem 7

$C_{1,\ldots},C_k$ seien die verschiedenen Klassen konjugierter Elemente von G. Eine auf G zentrale Funktion f ist konstant auf den Klassen $C_{1,\ldots},C_k$ und werde dort durch die Werte $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ festgelegt. Damit gilt für die Dimension des Raumes H der zentralen Funktionen $dim(H)=k$. Andererseits ist $dim(H)$ nach Theorem 6 gleich der Anzahl der irreduziblen Darstellungen von G (bis auf Äquivalenz). Damit gilt die Behauptung.

Beweis Proposition 7

Sei f_s diejenige Funktion, die auf der Klasse von s gleich 1 und sonst 0 ist. Da dies eine zentrale Funktion ist, lässt sie sich nach Theorem 6 in der Form $f_s=\sum_{i=1}^{h} x_i \chi_i$ mit $x_i=\langle\chi_i,f_s\rangle=\frac{c_s}{g}\overline{\chi_i(s)}$ schreiben.

Für jedes $t\in G$ gilt also $f_s(t)=\frac{c_s}{g}\sum_{i=1}^{h}\overline{\chi_i(s)}\chi_i(t)$. Für $s=t$ gilt nach Voraussetzung $f_s(s)=1$, für t nicht konjugiert zu s $f_s(s)=0$. Multiplikation mit $\frac{g}{c_s}$ liefert die Behauptung.

Beweis Theorem 8:

Setze $q_i=\frac{n_i}{g}\sum_{t\in G}\overline{\chi_i(t)}\rho_t$. Nach Prop. 6 ist die Einschränkung von q_i auf eine irreduzible Darstellung W mit Charakter χ und

Grad n eine Multiplikation mit dem Faktor $\frac{n_i}{n}\langle\chi_i,\chi\rangle$, sie ist also 0 für $\chi\neq\chi_i$ und 1 für $\chi=\chi_i$. Somit entspricht q_i auf einer zu W_i äquivalenten irreduziblen Darstellung und damit auf V_i der Identität, auf V_j mit $j\neq i$ ist es gleich 0. Man zerlege nun $x\in V$ in seine Komponenten $x_i\in V_i$: $x=x_1+\ldots+x_h$.
So erhält man $q_i(x)=q_i(x_1)+\ldots+q_i(x_h)=x_i$. Damit ist q_i der Projektor p_i von V auf V_i.
Der Projektor p_i hängt nicht von der gewählten irreduziblen Darstellung ab. Da $V_i=p_i(V)$, sind auch die V_i unabhängig von der ursprünglich gewählten Zerlegung in irreduzible Darstellungen.

<u>Beweis Proposition 8:</u>

Für W_i ergibt sich für $p_{\alpha\beta}$: $p_{\alpha\beta}(e_\gamma)=\frac{n_i}{g}\sum_{t\in G} r_{\beta\alpha}(t^{-1})\rho_t(e_\gamma)=\frac{n_i}{g}\sum_\delta\sum_{t\in G} r_{\beta\alpha}(t^{-1})r_{\delta\gamma}(t)e_\gamma$
Mit Kor. 3 zu Prop. 4 bekommen wir: $p_{\alpha\beta}(e_\gamma)=\delta_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\delta}\sum_\delta e_\delta=e_\alpha\delta_{\beta\gamma}$.
Somit ist $\sum_\alpha p_{\alpha\alpha}$ die Identitätsabbildung in W_i. Außerdem folgt, dass $p_{\alpha\beta}\circ p_{\gamma\delta}=p_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}$ (*) und $\rho_s\circ p_{\alpha\gamma}=\sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)p_{\beta\gamma}$. Für W_j mit $j\neq i$ lässt sich Kor. 3 zu Prop. 4 nutzen, um mit der selben Argumentation zu zeigen, dass alle $p_{\alpha\beta}=0$.
Nun werde V in eine direkte Summe von Unterdarstellungen isomorph zu W_j zerlegt und auf jedes das Vorherige angewendet.

Hieraus folgen a) und b). Die obigen Formeln bleiben in V gültig.

Damit erhält man unter der Annahme von c) Folgendes:

$$\rho_s(x_\alpha)=\rho_s\circ p_{\alpha 1}(x_1)=\sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)\,p_{\beta 1}(x_1)=\sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)x_\beta\,.$$

Damit gilt c). d) folgt aus a), b) und c).

(*) Zu zeigen: $p_{\alpha\beta}\circ p_{\gamma\delta}=p_{\alpha\alpha}\cdot\delta_{\beta\gamma}$

$$p_{\alpha\beta}\circ p_{\gamma\delta}=p_{\alpha\alpha}\circ\Big(\frac{n_i}{g}\sum_{t\in G} r_{\delta\gamma}(t^{-1})\rho_t\Big)=\frac{n_i^2}{g^2}\sum_{s,t\in G} r_{\beta\alpha}(s^{-1})r_{\delta\gamma}(t^{-1})\rho_{st}=\frac{n_i^2}{g}\sum_{u\in G}\Big(\sum_{\substack{s,t\in G\\ st=u}} r_{\beta\alpha}(s^{-1})r_{\delta\gamma}(t^{-1})\rho_u\Big)$$

$$p_{\alpha\beta}\circ p_{\gamma\delta}\overset{!}{=}\delta_{\beta\gamma}\frac{n_i}{g}\sum_{u\in G}(r_{\delta\alpha}(u^{-1}))\rho_u$$

Damit bleibt für jedes $u\in G$ zu zeigen: $\frac{n_i}{g}\sum_{\substack{s,t\in G\\ st=u}} r_{\beta\alpha}(s^{-1})r_{\delta\gamma}(t^{-1})=\delta_{\beta\gamma}r_{\delta\alpha}(u^{-1})$

$$\frac{n_i}{g}\sum_{\substack{s,t\in G\\ st=u}} r_{\beta\alpha}(s^{-1})r_{\alpha\gamma}(t^{-1})\overset{t^{-1}=u^{-1}s}{=}\frac{n_i}{g}\sum_{s\in G} r_{\delta\gamma}(u^{-1}s)r_{\beta\alpha}(s^{-1})=\frac{n_i}{g}\sum_{\epsilon} r_{\delta\epsilon}(u^{-1})\underbrace{\sum_{s\in G} r_{\epsilon\gamma}(s)r_{\beta\alpha}(s^{-1})}_{\substack{1\,falls\,\epsilon=\alpha\,und\,\gamma=\beta\\ 0\,sonst}}=r_{\delta\alpha}(u^{-1})\delta_{\gamma\beta}$$