Beispiele für lineare Darstellungen von Gruppen

David Langefeld

10. Juli 2016

1 Beispiele für Gruppen

Zuerst sehen wir uns einige Gruppen und deren Eigenschaften an.

Definition 1. *Sei C_n die Gruppe der Potenzen $1, r, ..., r^{n-1}$ mit $r^n = 1$. Die Gruppe C_n kann als Gruppe der Rotationen um $\frac{2\pi k}{n}$ um eine Achse aufgefasst werden.*

Lemma 1. *C_n ist abelsch und hat Ordnung n.*

Definition 2. *Sei D_n die Gruppe der Drehungen und Spiegelungen, die ein regelmäßiges n-Eck erhalten. D_n heißt Diedergruppe und es ist*

$$D_n = \langle r, s | r^n = s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle.$$

Lemma 2. *Es gelten*

1. *$sr^k s = r^{-k}$ und $(sr^k)^2 = 1$*
2. *jedes $t \in D_n$ lässt sich $(\mod n)$ eindeutig schreiben als $t = r^k$ (falls $t \in C_n$) oder als $t = sr^k$.*
3. *D_n hat Ordnung $2n$.*

Definition 3. *Sei $I := \langle 1, \tau | \tau^2 = 1 \rangle$ und $D_{n,h} := D_n \times I$.*

Bemerkung 1. *Fasst man D_n als Gruppe der Drehungen und Spiegelungen in $\mathbb{R}^3$ auf so kann τ als Spiegelung am Ursprung interpretiert werden.*

Lemma 3.
1. *jedes $t \in D_{n,h}$ kann eindeutig geschrieben werden als*

$$t = r^k, t = sr^k, t = \tau r^k \text{ oder } t = \tau sr^k.$$

2. *Es gilt $|D_{n,h}| = 4n$.*

Definition 4. *Die Gruppe aller graden Permutationen einer Menge $\{a, b, c, d\}$ heißt alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_4$. Die Gruppe kann als Gruppe aller Drehungen, die ein regelmäßiges Tetraeder in sich überführen aufgefasst werden. Sie besteht aus folgenden 12 Elementen:*

1. *Der Identität Id*
2. *3 Elementen von Ordnung 2:*

$$x := (a\ b)(c\ d), \quad y := (a\ c)(b\ d), \quad z := (a\ d)(b\ c)$$

3. *8 Elementen von Ordnung 3:*

$$(a\ b\ c),\quad (a\ c\ b),\quad (a\ c\ d),\quad (a\ d\ c),$$

$$(a\ b\ d),\quad (a\ d\ b),\quad (b\ c\ d),\quad (b\ d\ c).$$

Um die Struktur der $\mathfrak{A}_4$ zu verstehen zitieren wir 2 Sätze aus der Algebra:

Satz 1. *Jede Permutation lässt sich als Produkt paarweise diejunkter Zykel schreiben.*

Satz 2. *Seien $\sigma, \pi \in \mathfrak{S}_n$ mit $\pi = (\alpha_1^1\ ...\ \alpha_{n_1}^1)(\alpha_1^2\ ...\ \alpha_{n_2}^2)...(\alpha_1^m\ ...\ \alpha_{n_m}^m)$ mit $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_m$. Dann gelten*

1. $$\sigma\pi\sigma^{-1} = (\sigma\alpha_1^1\ ...\ \sigma\alpha_{n_1}^1)...(\sigma\alpha_1^m\ ...\ \sigma\alpha_{n_m}^m).$$

2. *Sei $\sigma := (\beta_1^1\ ...\ \beta_{k_1}^1)...(\beta_1^l\ ...\ \beta_{k_l}^l)$ mit $2 \leq k_1 \leq ... \leq k_l$. Dann ist π konjugiert zu σ genau dann wenn gelten $l = m$ und $k_i = n_i \forall i = 1, ..., m$.*

Mithilfe dieser Sätze und durch einfaches nachrechnen ergibt sich folgendes Lemma:

Lemma 4. *Seien $t := (a\ b\ c)$, $K := \{Id, t, t^2\}$ und $H := \{Id, x, y, z\}$. Dann gelten*

1. $txt^{-1} = z, ;\ \ tyt^{-1} = x$ und $tzt^{-1} = y$.
2. *K ist Untergruppe von $\mathfrak{A}_4$.*
3. *H ist Normalteiler von $\mathfrak{A}_4$.*
4. *Es ist $H \cap K = \{Id\}$.*

Lemma 5. *Für das semidirekte Produkt $KH := \{kh | k \in K, h \in H\}$ gilt $KH = \mathfrak{A}_4$.*

Beweis. Man zeige zunaächst, dass KH Untergruppe von $\mathfrak{A}_4$ ist. Für $k, k_1, k_2 \in K$ und $h, h_1, h_2 \in H$ gelten

1. Da H Normalteiler ist ist $k_2^{-1}h_1k_2 \in H$ und
$$(k_1h_1)(k_2h_2) = \underbrace{k_1k_2}_{\in K}\underbrace{\underbrace{k_2^{-1}h_1k_2}_{\in H}h_2}_{\in H}$$

2. Es ist
$$(kh)^{-1} = h^{-1}k^{-1} = \underbrace{k^{-1}}_{\in K}\underbrace{kh^{-1}k^{-1}}_{\in H}.$$

Es gelten $|H| = 4$ und $|K| = 3$. Man zeige $|KH| = |K||H| = 12$ indem man zeigt, dass $f : K \times H \ni (k, h) \mapsto kh \in KH$ bijektiv ist. Da f nach Konstruktion surjektiv ist bleibt nur die Injektivität zu zeigen: Angenommen es ist $k_1h_1 = k_2h_2$, dann folgen $k_2^{-1}k_1 = h_2h_1^{-1}$ und wegen $H \cap K = \{Id\}$ auch $k_1 = k_2 = h_1 = h_2 = Id$.
Damit ist KH eine Untergruppe von Ordnung 12 von $\mathfrak{A}_4$ womit gilt $KH = \mathfrak{A}_4$. $\square$

Mit den obigen Sätzen und Lemmata ergibt sich auch das folgende Lemma:

Lemma 6. $\mathfrak{A}_4$ *hat die vier Konjugationsklassen*

$$\{Id\}, \quad \{x, y, z\}, \quad \{t, tx, ty, tz\} \text{ und } \{t^2, t^2x, t^2y, t^2z\}.$$

2 Beispiele für lineare Darstellungen

2.1 Die zyklische Gruppe C_n

Da C_n abelsch ist haben nach Thrm 9 in [1] alle irreduziblen Darstellungen Grad 1. Solch eine Darstellung ordnet jedem $r \in C_n$ ein $\chi(r) = \omega \in \mathbb{C}$ zu. Wegen $r^n = 1$ folgt $\omega^n = \chi(r^n) = 1$ und damit $\omega = e^{\frac{2\pi i h}{n}}$ mit $h = 0, 1, ;n-1$. Man erhält also n irreduzible Darstelllungen mit Charakteren $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1}$, die durch

$$\chi_h(r^k) = e^{\frac{2\pi i h k}{n}}$$

gegeben sind. Für das Beispiel $n = 3$ setze $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Für die Charaktere gilt dann:

	1	r	r^2
χ_0	1	1	1
χ_1	1	ω	ω^2
χ_2	1	ω^2	ω

2.2 Die Gruppe D_n für grade n

Da für gerade Exponenten n gilt

$$\rho(r^n) = \rho(r)^n = 1$$

folgt $\rho(r) = \pm 1$. Somit erhalten wir vier irreduzible Darstellungen von Grad 1 durch alle möglichen Zuordnungen von ± 1 auf r und s. Für die Zugehörigen Charaktere $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ gilt dann

	r^k	sr^k
Ψ_1	1	1
Ψ_2	1	-1
Ψ_3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
Ψ_4	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

Beschäftigen wir uns nun mit den Darstellungen zweiten Grades:

Lemma 7. *Sei* $h \in \mathbb{Z}$. *Setze* $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. *Dann wird duch*

$$\rho^h(r^k) = \begin{pmatrix} \omega^h k & 0 \\ 0 & \omega^{-hk} \end{pmatrix}$$

und

$$\rho^h(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-hk} \\ \omega^{hk} & 0 \end{pmatrix}$$

eine lineare Darstellung ρ^h *von* D_n *definiert.*

Beweis. Man zeige die Linearität für alle möglichen Kombinationen von Produkten von Gruppenelementen. Es gilt

1.
$$\rho^h(r^k r^m) = \rho^h(r^{k+m}) = \begin{pmatrix} \omega^{h(k+m)} & 0 \\ 0 & \omega^{h(k+m)} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \omega^{hk} & 0 \\ 0 & \omega^{hk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{hm} & 0 \\ 0 & \omega^{hm} \end{pmatrix} = \rho^h(r^k)\rho^h(r^m)$$

2.
$$\rho^h(sr^k sr^m) = \rho^h(r^{m-k}) = \begin{pmatrix} \omega^{h(m-k)} & 0 \\ 0 & \omega^{-h(m-k)} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-hk} \\ \omega^{hk} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-hm} \\ \omega^{hm} & 0 \end{pmatrix} = \rho^h(sr^k)\rho^h(sr^m)$$

3.
$$\rho^h(sr^k r^m) = \rho^h(sr^{k+m}) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-h(k+m)} \\ \omega^{h(k+m)} & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-hk} \\ \omega^{hk} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{hm} & 0 \\ 0 & \omega^{-hm} \end{pmatrix} = \rho^h(sr^k)\rho^h(r^m)$$

4.
$$\rho^h(r^k sr^m) = \rho^h(sr^{m-k}) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-h(m-k)} \\ \omega^{h(m-k)} & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \omega^{hk} & 0 \\ 0 & \omega^{-hk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-hm} \\ \omega^{hm} & 0 \end{pmatrix} = \rho^h(r^k)\rho^h(sr^m)$$

□

Die Darstellung ist induziert von der Darstellung von C_n und hängt nur von der Restklasse $h \mod n$ ab. Desweiteren sind ρ^h und ρ^{n-h} isomorph, sodass wir $0 \leq h \leq \frac{n}{2}$ annehmen können. Hierbei sind die Fälle $h = 0$ und $h = \frac{n}{2}$ uninteressant, da die zugehörigen Darstellungen reduzibel sind (Sie besitzen die Charaktere $\Psi_1 + \Psi_2$ beziehungsweise $\Psi_3 + \Psi_4$.).
Für $0 < h < \frac{n}{2}$ ist die Darstellung ρ^h irreduzibel, da $\omega^h \neq \omega^{-h}$ gilt und die einzigen unter $\rho^h(r)$ stabilen Geraden die Koordinatenachsen sind, diese aber gegenüber $\rho^h(s)$ nicht invariant sind. Analog lässt sich begründen, dass die Darstellungen paarweise inäquivalent (nicht isomorph) sind. Die entsprechenden Charaktere sind gegeben durch

$$\chi_h(r^k) = \omega^{hk} + \omega^{-hk} = e^{\frac{2\pi ihk}{n}} + e^{-\frac{2\pi ihk}{n}} = 2\cos\frac{2\pi hk}{n}$$

und
$$\chi_h(sr^k) = 0.$$
Für die Quadratsumme der Grade der Darstellungen gilt

$$4 \times 1^2 + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \times 2^2 = 2n = \mathrm{ord}(D_n).$$

Folglich gibt es keine weiteren irreduziblen Darstellungen von D_n.
Beispiel: Die Gruppe D_6 hat 4 irreduzible Darstellungen von Grad 1 mit Charakteren $\Psi_1, \ldots, \Psi_4$ und 2 Darstellungen von Grad 2 mit Charakteren χ_1, χ_2.

2.3 Die Gruppe D_n für ungrade n

In diesem Fall gibt es nur 2 irreduzible Darstellungen von Grad 1 mit Charakteren Ψ_1, Ψ_2, sodass gilt:

	r^k	sr^k
Ψ_1	1	1
Ψ_2	1	-1

Die Darstellungen ρ^h von Grad 2 seien definiert wie für grade n. Analog zu oben sind die Darstellungen mit $0 < h < \frac{n}{2}$ irreduzibel und paarweise inäquivalent. Da n ungrade ist gilt dies wenn $0 < h \leq \frac{n-1}{2}$ erfüllt ist. Diese Darstellungen sind die einzigen. Für die Quadratsumme der Grade der Charaktere gilt

$$2 \times 1 + \frac{n-1}{2} \times 2^2 = 2n = \operatorname{ord}(D_n).$$

2.4 Die Gruppe $D_{n,h}$

Mit Thrm 10 in [1] ergeben sich die irreduziblen Darstellungen von $D_{n,h}$ derjenigen von D_n und derjenigen von I.
Die Gruppe I hat nur 2 irreduzible Darstellungen , jeweils von Grad 1, deren Charaktere g und u gegeben sind durch

	1	τ
g	1	1
u	1	-1

Die Quadratsumme der Grade ist wieder 2.
Es gibt doppelt so viele irreduzible Charaktere von D_{hn} wie von D_n, da jeder Charakter χ von D_n zwei Charaktere χ_g und χ_u von D_{hn} definiert. Für $x \in D_n$ gilt:

	x	τx
χ_g	$\chi(x)$	$\chi(x)$
χ_u	$\chi(x)$	$-\chi(x)$

So entstehen beispielsweise aus dem Charakter χ_1 von D_n die Charaktere χ_{1u} und χ_{1g} von D_{nh}, sodass

	r^k	sr^k	τr^k	τsr^k
χ_{1g}	$2\cos\frac{2\pi k}{n}$	0	$2\cos\frac{2\pi k}{n}$	0
χ_{1u}	$2\cos\frac{2\pi k}{n}$	0	$-2\cos\frac{2\pi k}{n}$	0

gilt. Bei den anderen Charakteren lässt sich analog vorgehen.

2.5 Die Gruppe $\mathfrak{A}_4$

Die Gruppe $\mathfrak{A}_4$ besitzt 4 Konjugationsklassen und daher 4 irreduzible Darstellungen (Thrm 7 in [1]). Da mit $K := \{Id, t, t^2\}$ und $H := \{Id, x, y, z\}$ gilt $KH = \mathfrak{A}_4$ und da K zyklisch ist ergeben sich 3 irreduzible Darstellungen

$\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2$ von Grad 1 von $\mathfrak{A}_4$ aus denen Darstellungen ρ_0, ρ_1, ρ_2 von K. Man erhält sie indem man $\tilde{\rho}_i(kh) = \rho(k)$ setzt. Entsprechend haben sie die Charaktere $\tilde{\chi}_i(kh) = \chi(k)$.
Für den letzten Charakter Ψ nutzt man Prop 5, Cor 1 und Cor 2 ([1] Kapitel 2, Seite 18): Nach Cor 2 gilt für Grade n_i der Charaktere $\sum_{s \in G} n_i^2 = g$. Somit folgt

$$12 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + d^2,$$

also $d = \deg(\Psi) = 3$. Bezeichne r_G den Charakter der regulären Darstellung. Nach Cor 1 gilt

$$3 = \deg(\Psi) = \langle r_G, \Psi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} r_G(s^{-1})\Psi(s) \overset{\text{Prop 5}}{=} \frac{1}{g} g\Psi(1) = \Psi(1).$$

Man setzt $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ und erhält mit Cor 2:

1.
$$r_G(x) = 0 = \sum n_i \chi_i(x) = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 3 \times y \quad \Rightarrow \Psi(x) = -1$$

2.
$$r_G(t) = 0 = \sum n_i \chi_i(t) = 1 \times 1 + 1 \times \omega + 1 \times \omega^2 + 3 \times y \quad \Rightarrow \Psi(t) = 0$$

3.
$$r_G(t^2) = 0 = \sum n_i \chi_i(t^2) = 1 \times 1 + 1 \times \omega^2 + 1 \times \omega + 3 \times y \quad \Rightarrow \Psi(t^2) = 0.$$

Damit erhält man folgende Charaktertabelle von $\mathfrak{A}_4$:

	1	x	t	t^2
$\tilde{\chi}_1$	1	1	1	1
$\tilde{\chi}_2$	1	1	ω	ω^2
$\tilde{\chi}_3$	1	1	ω^2	ω
Ψ	3	-1	0	0

Literatur

[1] J.P. Serre, *Linear representation of finite groups,* Springer Verlag. ISBN: 0-387-90190-6.