Lineare Darstellungen von abelschen Gruppen, Untergruppen, Produkten von Gruppen und induzierte Darstellungen

Alexander Dicke

24. Juni 2016

1 Notation und Begriffe

Notation. Im folgenden schreiben wir immer G für eine Gruppe und $|G|$ für ihre Ordnung, wobei wir immer annehmen, dass die Ordnung endlich ist. Wir schreiben 1 für das neutrale Element in G und mit $H \leq G$ notieren wir, dass H eine Untergruppe von G ist. Die gleiche Schreibweise werden wir außerdem für einen Untervektorraum W von V nutzen, d.h. wir schreiben dann $W \leq V$.

Wir wollen zunächst, der Vollständigkeit halber, einige wichtige Begriffe wiederholen, die wir für den Abschnitt benötigen. Dazu sei $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine lineare Darstellung.

Definition 1.1 (Grad)**.** Wir sagen $\dim V$ ist der Grad der Darstellung.

Definition 1.2 (stabiler Unterraum)**.** Sei $W \leq V$ ein Unterraum. Wir sagen W ist stabil unter der Wirkung von G, falls für alle $g \in G$ und $w \in W$

$$\varphi(g)w \in W$$

gilt.

Definition 1.3 (Teildarstellung)**.** Sei $W \leq V$ stabil. Dann ist $\varphi^W : G \to \mathrm{GL}(W)$ eine lineare Darstellung von G in W und man nennt W eine Teildarstellung.

Definition 1.4 (irreduzible Darstellung)**.** φ heißt irreduzibel, falls kein echter Unterraum $0 \neq U \leq V$ stabil ist.

Definition 1.5 (Charakter)**.** Sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von V und $A : V \to V$ linear mit der Matrixdarstellung $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ bzgl. der Basis. Wir schreiben dann $\mathrm{Tr}A = \sum_{1 \le i \le n} a_{ii}$ für die Spur von A und setzen

$$\chi_\varphi(g) := \mathrm{Tr}(\varphi(g)) \text{ mit } g \in G.$$

Wir nennen χ_φ den Charakter von φ und ist φ irreduzibel, so nennen wir χ_φ einen irreduziblen Charakter.

Definition 1.6 (isomorphe Darstellungen)**.** Seien V, V' Vektorräume und $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V), \varphi' : G \to \mathrm{GL}(V')$ lineare Darstellungen von G. Dann heißen φ und φ' isomorph[1], falls es einen Isomorphismus $T : V \to V'$ gibt, derart dass $T \circ \varphi(g) \circ T^{-1} = \varphi'(g)$ für alle $g \in G$ gilt.

Definition 1.7 (Klassenfunktion)**.** Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt Klassenfunktion, falls für alle $g, h \in G$ die Identität $f(gh) = f(hg)$ gilt.

2 Lineare Darstellungen: abelsche Gruppen und abelsche Untergruppen

Definition 2.1. Sei G eine Gruppe. Dann heißt G abelsch, falls alle Elemente miteinander kommutieren.

Wir stellen uns die Frage, welche Vorteile uns die zusätzliche Gruppenstruktur für die linearen Darstellungen liefert. Wir können zunächst zeigen, dass die linearen Darstellungen von abelschen Gruppen sich immer maximal zerlegen[2] lassen und abelsche Gruppen sogar durch diese Tatsache charakterisiert werden können. Für den Beweis brauchen wir einige Lemmata, die bereits in den vorhergehenden Vorträgen bewiesen worden sind.

Lemma 2.2 (Theorem 2, S. 7, [S])**.** *Jede lineare Darstellung ist direkte Summe von irreduziblen Darstellungen.*

Lemma 2.3 (Korrolar 2, S. 18, [S])**.** *Sei G eine Gruppe und seien $\chi_{\varphi_1}, \dots, \chi_{\varphi_\ell}$ die irreduziblen Charaktere[3]. Schreibe $n_1 \dots, n_\ell \in \mathbb{N}$ für ihren Grad. Dann gilt*

$$|G| = \sum_{j=1}^{\ell} n_j^2.$$

Lemma 2.4 (Theorem 7, S. 19, [S])**.** *Die Anzahl der irreduziblen linearen Darstellungen[4] von G ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von G.*

[1] wir schreiben auch kurz $\varphi \cong \varphi'$

[2] d.h. irreduzible Darstellungen besitzen immer minimalen Grad

[3] deren Existenz mit 2.2 gesichert ist

[4] bis auf Isomorphie

Wir zeigen nun den folgenden

Satz 2.5. *Für eine Gruppe G ist äquivalent:*

1. *G ist abelsch,*

2. *Alle irreduziblen Darstellungen von G haben Grad 1.*

Zunächst sei noch eine Eigenschaft von abelschen Gruppen genannt: Ist $g \in G$, so besteht die Konjugationsklasse von g nur aus g selbst, denn mit der Kommutativität haben wir für alle $h \in G$

$$hgh^{-1} = hh^{-1}g = 1g = g.$$

Damit ergibt sich sofort, dass die Anzahl der Konjugationsklassen gleich der Gruppenordnung $|G|$ ist.

Beweis. Seien $n_1, \ldots, n_\ell$ die Grade der irreduziblen Charaktere von G. Da G abelsch, erhalten wir mit 2.4 $\ell = |G|$ und mit 2.3

$$\ell = |G| = \sum_{j=1}^{\ell} n_j^2,$$

was genau dann erfüllt ist, wenn $n_1 = \cdots = n_\ell = 1$ gilt. □

Um weniger Anforderung an die Gruppe stellen zu müssen, möchten wir den maximalen Grad einer irreduziblen Darstellung bereits einschränken, wenn nicht die gesamte Gruppe abelsch ist. Um 2.5 nutzen zu könne, können wir etwa abelsche Untergruppen betrachten, wovon es trivialerweise immer mindestens eine gibt, nämlich $\{1\} \leq G$. Umgekehrt folgt aus 2.5, dass jede nichtabelsche Gruppe mindestens eine irreduzible Darstellung vom Grad ≥ 2 besitzt.

Satz 2.6. *Sei $U \leq G$ eine abelsche Untergruppe einer nicht notwendigerweise abelschen Gruppe G. Dann ist der Grad jeder irreduzible Darstellung von G $\leq \frac{|G|}{|U|}$.*

Mit der obigen Bemerkung ist hiermit sofort klar, dass der Grad einer jeden irreduziblen Darstellung durch die Gruppenordnung beschränkt ist. Der Quotient erinnert uns sofort an den

Satz 2.7 (Lagrange)**.** *Sei G eine Gruppe, $U \leq G$ eine Untergruppe und $[G : U]$ sei die Anzahl der Nebenklassen von U in G*[5]*. Dann gilt $\frac{|G|}{|U|} = [G : U]$.*

[5] man nennt $[G : U]$ den Index von U in G

Wir beweisen nun 2.6:

Beweis. Nach Satz 2.7 ist $\frac{|G|}{|U|} = [G : U]$. Sei nun φ eine irreduzible Darstellung von G in V. Offenbar ist dann $\varphi_{|U}$ eine Darstellung von U in V und wir können eine irreduzible Teildarstellung $W \leq V$ finden. Da U abelsch, ist nach Satz 2.5 die Dimension von W gleich 1 und wir erhalten einen Vektorraum $\overline{V} = \{\varphi(g)W \mid g \in G\}$. Für jedes $v \in \overline{V}$ gibt es also ein $g \in G$ sodass $v = \varphi(g)W$ und es gilt für $h \in G$

$$\varphi(h)v = \varphi(h)(\varphi(g)W) = (\varphi(h)\varphi(g))W = \varphi(hg)W \in \overline{V}.$$

Damit ist $\overline{V}$ stabil unter der Wirkung von G. Da wir φ als irreduzibel vorausgesetzt haben, sind nur der Nullvektorraum sowie V stabil und da $\overline{V}$ ein von null verschiedenes Element enthält[6], folgt $V = \overline{V}$. Weiter gilt für $g \in G$ und $h \in U$

$$\varphi(gh)W = \varphi(g)\varphi(h)W = \varphi(g)W,$$

nach Definition von W. Es folgt, dass für zwei Gruppenelemente $s, t \in G$, die in der gleichen Nebenklasse bzgl. U liegen

$$\varphi(s)W = \varphi(t)W$$

gilt. Nach dem Satz von Lagrange gibt es $\frac{|G|}{|U|}$ Nebenklassen und da V die Summe der verschiedenen $\varphi(s)W$ ist, folgt mit $\dim(\varphi(s)W) = \dim(W) = 1$ dass $\dim(V) \leq \frac{|G|}{|U|}$, was zu zeigen war. □

3 Produkte von Gruppen und ihre linearen Darstellungen

Im folgenden seien G_1 und G_2 Gruppen.

Satz 3.1 (Produkt)**.** *Die Menge der Paare $G_1 \times G_2$ wird mit der komponentenweisen Verknüpfung $(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) := (g_1h_1, g_2h_2)$ zu einer Gruppe.*

Sei nun G eine Gruppe und $G_1, G_2 \leq G$. Falls es für jedes $g \in G$ Elemente $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ gibt, sodass $g = g_1g_2$ gilt und die beiden Untergruppen zusätzlich kommutieren so kann man für $g, h \in G$ stets

$$gh = (g_1g_2)(h_1h_2) = (g_1h_1)(g_2h_2)$$

mit geeigneten $g_j, h_j \in G_j$ schreiben. Damit ist durch $(g, h) \mapsto gh$ ein Isomorphismus $G_1 \times G_2 \to G$ gegeben und es gilt $G_1 \times G_2 \cong G$.

[6] es gilt $W \in \overline{V}$ und $\dim W = 1$

Satz 3.2 (Tensorprodukt)**.** *Seien* $\varphi_1 : G_1 \to \mathrm{GL}(V_1)$ *und* $\varphi_2 : G_2 \to \mathrm{GL}(V_2)$ *lineare Darstellungen. Dann ist*

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(g_1, g_2) := \varphi_1(g_1) \otimes \varphi_2(g_2),$$

eine lineare Darstellung von $G_1 \times G_2$ *in* $V_1 \otimes V_2$*, das sog. Tensorprodukt der Darstellungen* φ_1 *und* φ_2*.*

Beweis. Folgt leicht aus den bekannten Rechenregeln für lineare Abbildungen. □

Wir können also auf diesem Weg lineare Darstellungen von Produkten von Gruppen erhalten. Doch inwiefern „erbt“$\varphi_1 \otimes \varphi_2$ Eigenschaften wie etwa die Irreduzibilität von den φ_j und lässt sich jede lineare irreduzible Darstellung von $G_1 \times G_2$ als Tensorprodukt darstellen? Die erste Frage wird durch den folgenden Satz beantwortet:

Satz 3.3. *Sind die* φ_j *irreduzibel, so ist* $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ *ebenfalls irreduzibel.*

Es wurde bereits gezeigt:

Lemma 3.4 (Theorem 5, S. 17, [S])**.** χ *ist genau dann der Charakter einer irreduziblen Darstellung wenn*

$$1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2$$

gilt.

Lemma 3.5 (Proposition 2, S. 11, [S])**.** *Seien* χ_1, χ_2 *Charaktere zweier linearer Darstellungen. Dann ist der Charakter des Tensorproduktes* $= \chi_1 \cdot \chi_2$*.*

Damit zeigen wir nun 3.3:

Beweis. Seien φ_1, φ_2 irreduzibel und $\chi_1 := \chi_{\varphi_1}, \chi_2 := \chi_{\varphi_2}$. Mit 3.4 haben wir

$$1 = \frac{1}{|G_1|} \sum_{g_1 \in G_1} |\chi_1(g_1)|^2 \text{ sowie } 1 = \frac{1}{|G_2|} \sum_{g_2 \in G_2} |\chi_2(g_2)|^2$$

und es folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{1}{|G_1|} \sum_{g_1 \in G_1} |\chi_1(g_1)|^2 \right) \cdot \left(\frac{1}{|G_2|} \sum_{g_2 \in G_2} |\chi_2(g_2)|^2 \right) \\ &= \frac{1}{|G_1||G_2|} \sum_{g_j \in G_j} |\chi_1(g_1) \cdot \chi_2(g_2)|^2 \\ &\overset{3.5}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g_j \in G_j} |\chi_{\varphi_1 \otimes \varphi_2}(g_1, g_2)|^2. \end{aligned}$$

Erneute Anwendung von 3.4 zeigt, dass $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ irreduzibel ist. □

Um uns der zweiten Frage widmen zu können, wiederholen wir ein Lemma, das wir im Beweis benötigen werden.

Lemma 3.6 (Theorem 6, S. 19, [S])**.** *Sei H der Vektorraum der Klassenfunktionen auf G. Dann bilden die irreduziblen Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_\ell$ eine Orthonormalbasis von H.*

Satz 3.7. *Zu jeder irreduziblen Darstellung η von $G_1 \times G_2$ existieren irreduzible Darstellungen $\eta_j : G_j \to \mathrm{GL}(V_j)$ derart, dass $\eta \cong \eta_1 \otimes \eta_2$.*

Beweis. Wir zeigen, dass jede Klassenfunktion f auf $G_1 \times G_2$, die $(f|\chi_1\chi_2) = 0$ für Charaktere der Form $\chi_1(g_1)\chi_2(g_2)$ erfüllt, identisch null ist[7]. Mit 3.6 folgt dann die Behauptung. Angenommen, es gilt

$$0 = |G_1||G_2| \cdot (f|\chi_1\chi_2) = \sum_{g_j \in G_j} f(g_1, g_2)\overline{(\chi_1(g_1)\chi_2(g_2))}$$

für alle Charaktere der obigen Form. Dann wähle einen beliebigen Charakter χ_2 und definiere eine Klassenfunktion g auf G_1 durch

$$g(g_1) := \sum_{g_2 \in G_2} f(g_1, g_2)\overline{\chi_2(g_2)}. \tag{1}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sum_{g_1 \in G_1} g(g_1)\overline{\chi_1(g_1)} \\
&= \sum_{g_1 \in G_1} \left(\sum_{g_2 \in G_2} f(g_1, g_2)\overline{\chi_2(g_2)} \right) \overline{\chi_1(g_1)} \\
&= \sum_{g_j \in G_j} f(g_1, g_2)\overline{(\chi_1(g_1)\chi_2(g_2))} \\
&\overset{(1)}{=} 0
\end{aligned}$$

für alle χ_1. Nach 3.6 bilden die χ_1 eine Basis des Vektorraums der Klassenfunktionen auf G_1. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass nur der Nullvektor orthogonal zu allen Basisvektoren ist; folglich muss $g = 0$ gelten. Da wir χ_2 beliebig wählen können, ergibt sich analog $f = 0$. □

Wir geben einen weiteren Beweis für 3.7:

[7] für zwei komplexwertige Funktionen ψ, θ auf G definieren wir ein Skalarprodukt durch $(\psi|\theta) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g)\overline{\theta(g)}$

Beweis. Mit dem Korrolar 2, S. 18, [S] gelten für die Gerade

$$n_1, \dots, n_L, m_1, \dots, m_N,$$

der irreduziblen Charaktere von G_1 bzw. G_2 die Identitäten

$$|G_1| = \sum_{j=1}^{L} n_j^2,$$
$$|G_2| = \sum_{j=1}^{N} m_j^2.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |G_1 \times G_2| = |G_1||G_2| &= \left(\sum_{j=1}^{L} n_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{N} m_j^2\right) \\ &= \sum (n_i m_j)^2 \end{aligned}$$

und die $n_i m_j$ sind die Gerade des Tensorproduktes. Da mit η_1 und η_2 auch $\eta_1 \otimes \eta_2$ irreduzibel ist, folgt daraus, dass hierdurch alle irreduziblen Darstellungen von $G_1 \times G_2$ gegeben sind. □

4 Induzierte Darstellung

Notation. Sei $H \leq G$. Dann schreiben wir $G/H := \{gH \mid g \in G\}$ für die Menge der Linksnebenklassen von H in G.

Sei $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine lineare Darstellung. Es seien $H \leq G$ und $W \leq V$ stabil unter der Wirkung von H. Zu $L \in G/H$ definieren wir dann einen Vektorraum

$$W_L := \varphi(g)W \leq V$$

mit einem $g \in L$[8].

Definition 4.1 (inducierte Darstellung)**.** Eine Darstellung φ von G in V heißt induziert durch die Darstellung $\psi = \varphi_{|H}^{W}$ von H in W, falls

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma.$$

[8] W_L ist unabhängig von der Wahl des Vertreters

Beispiel 4.2 (Die Permutationsgruppe S_3)**.** Sei

$$G = S_3 = \left\{1, d, d^2, s_1, s_2, s_3\right\},$$
$$H = A_3 = \left\{1, d, d^2\right\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Wähle V mit $\dim V = 6$ und einer Basis $\mathcal{B} = \{e_g\}_{g\in G}$ und einen Unterraum $W \leq V$ mit $\dim(W) = 3$ und der Teilbasis $\mathcal{C} = \{e_h\}_{h\in H}$. Sei φ die reguläre Darstellung von G in V bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ und ψ die reguläre Darstellung von H in W bezüglich der Basis $\mathcal{C}$. Wegen $[G : H] = 2$ gibt es zwei Nebenklassen

$$L_1 = 1A_3 = dA_3 = d^2A_3 = \left\{e, d, d^2\right\},$$
$$L_2 = s_1A_3 = s_2A_3 = s_3A_3 = \{s_1, s_2, s_3\}.$$

Es ergibt sich:

$$W_1 := W_{L_1} = \left\{\varphi(e)W, \varphi(d)W, \varphi(d^2)W\right\} = \operatorname{span}\{e_h\}_{h\in H} = W,$$

da $L_1 = H$ und

$$W_2 := W_{L_2} = \{\varphi(s_1)W, \varphi(s_2)W, \varphi(s_3)W\} = \operatorname{span}\{e_s\}_{s\notin H}.$$

Damit ist offensichtlich $V = W_1 \oplus W_2$ und die Darstellung φ von $G = S_3$ in V ist durch die Darstellung ψ von $H = A_3$ in W induziert.

Beispiel 4.3. Der Spezialfall aus 4.2 kann noch verallgemeinert werden: Sei $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ die reguläre Darstellung, d.h. $\dim(V) = |G|$, V hat die Basis $\{e_g\}_{g\in G}$ und $\varphi(h)e_g := e_{hg}$. Zu $H \leq G$ wähle $W \leq V$ mit Basis $\{e_h\}_{h\in H}$ und die reguläre Darstellung $\psi(s)e_h := e_{sh}$ für $s \in H$. Dann wird φ durch ψ induziert.

Beispiel 4.4. Sei $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ durch $\psi : H \to \mathrm{GL}(W)$ induziert. Weiter sei $X \leq W$ unter der Wirkung von H stabil. Dann haben wir:

$$Y := \sum_{r\in R(G/H)} \varphi(r)X$$

ist stabil unter G[9] und die Darstellung von G in Y ist durch die Darstellung von H in X induziert.

Beispiel 4.5. Sei φ_j von ψ_j $(j = 1, 2)$ induziert. Dann wir $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ durch $\psi_1 \oplus \psi_2$ induziert.

Beispiel 4.6. Sei φ durch ψ induziert und θ eine Darstellung von G. Dann ist $\varphi \otimes \theta$ induziert durch $\psi \otimes \theta_{|H}$.

[9] $R(G/H)$ bezeichne ein Vertretersystem von G/H

4.1 Existenz

Zuerst gilt es zu klären, ob eine solche Darstellung überhaupt immer existiert. Diese Frage werden wir in diesem Abschnitts beantworten, d.h. wir zeigen den

Satz 4.7 (Existenz einer Induzierten Darstellung)**.** *Sei $\psi : H \to \mathrm{GL}(W)$ eine lineare Darstellung von H in W. Dann gibt es eine durch ψ und W induzierte Darstellung $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ von G in V.*

Bemerkung. Mit 4.5 und 2.2 können wir immer annehmen, dass ψ bereits selbst irreduzibel ist.

Lemma 4.8 (Korrolar 1. S. 18, [S])**.** *Jede irreduzible Darstellung ist in der regulären Darstellung enthalten.*

Hiermit zeigen wir 4.7:

Beweis. Aus 4.3 wissen wir, dass die reguläre Darstellung von H die reguläre Darstellung von G induziert. Nach der obigen Bemerkung können wir annehmen, dass ψ irreduzibel ist. Dann ist ψ nach 4.8 isomorph zu einer Teildarstellung der regulären Darstellung und mit 4.4 gibt es eine Teildarstellung der regulären Darstellung von G, die durch ψ induziert ist. □

4.2 Charakter und Eindeutigkeit induzierter Darstellungen

Wir zeigen nun, dass auch der Charakter einer durch $\psi : H \to \mathrm{GL}(W)$ induzierten Darstellung bereits durch den Charakter χ_ψ bestimmt ist. Daraus folgern wir die Eindeutigkeit induzierter Darstellungen.

Satz 4.9. *Sei $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine durch $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ induzierte Darstellung. Dann gilt für alle $g \in G$*

$$\chi_\varphi(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{s^{-1}gs \in H} \chi_\psi(s^{-1}gs).$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$V = \bigoplus_{r \in R(G/H)} \varphi(r)W.$$

Für $r \in R(G/H)$ und $g \in G$ können wir $gr = r_g t$ mit einem $r_g \in R(G/H)$ und $t \in H$ schreiben, sodass wir

$$\varphi(g)\varphi(r)W = \varphi(r_g t)W = \varphi(r_g)W$$

erhalten. Um $\chi_\varphi(g)$ zu bestimmen, nutzen wir eine Basis von V, die Vereinigung von Basen der $\varphi(r)W$ ist. Die Indizes r verschieden von r_g liefern keine Diagonalterme und im anderen Fall haben wir, nach der obigen Rechnung, dass $\varphi(r)W$ invariant unter $\varphi(g)$ ist. Damit haben wir die Spur von $\varphi(g)$ auf den $\varphi(r)W$ und mit $R_g := \{r \in R(G/H) \mid rH = r_gH\}$ gilt

$$\chi_\varphi(g) = \sum_{r \in R_g} \mathrm{Tr}_{\varphi(r)W}\left(\varphi(t)_{|\varphi(r)W}\right).$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass $r \in R_g$ genau dann, wenn $gr = rh$ mit einem $h \in H$[10].

Da $\varphi(r)$ ein Isomorphismus $W \to \varphi(r)W$ ist und wegen

$$\varphi(r) \circ \psi(h) = \varphi(g)_{|\varphi(r)W} \circ \varphi(r)$$

für $h = r^{-1}gr \in H$ folgt

$$\mathrm{Tr}\left(\varphi(t)_{|\varphi(r)W}\right) = \mathrm{Tr}(\psi(h)) = \chi_\psi(r^{-1}gr).$$

Summieren liefert uns

$$\chi_\varphi(g) = \sum_{r \in R_g} \chi_\psi(r^{-1}gr)$$

und wir erhalten die Behauptung, indem wir einsehen, dass für $r \in R_g$ alle $s \in rH$ die Gleichung $\chi_\psi(s^{-1}gs) = \chi_\psi(r^{-1}gr)$ erfüllen. Da es $|H|$–viele derartige s gibt, folgt die Behauptung. □

Wir zitieren noch das folgende

Korrolar 4.10 (Korrolar 2, S. 16, [S])**.** *Zwei lineare Darstellungen mit dem gleichen Charakter sind isomorph.*

Damit erhalten wir nun das

Korrolar 4.11. *Es gibt bis auf Isomorphie nur eine durch $\psi : H \to \mathrm{GL}(W)$ induzierte Darstellung.*

Beweis. Nach 4.9 haben zwei, durch ψ induzierte Darstellungen den gleichen Charakter und nach 4.10 sind sie isomorph. □

Literatur

[S] Serre, J.P. *Linear representation of finite groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 42, Springer-Verlag, New York, 1977.

[10] das ist genau dann der Fall, wenn $r^{-1}gr \in H$