Zwischenklausur — Kodierungstheorie 2015

N-P. Skoruppa und Hatice Boylan

21. Mai 2015

Name:
Matrikelnummer:
Studiengang:
Studiensemester:
Geburtsdatum:

Sie erhalten Papier für Ihre Notizen und Lösungen von uns. Auf Ihrem Arbeitsplatz sollten sich nichts anderes als das Aufgabenblatt, das von uns gestellte Papier und maximal drei Kugelschreiber befinden. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Vorlesungsmitschriften und Etuis nicht erlaubt.

1 Grundbegriffe

Vervollständigen Sie die folgenden Aussagen.

1.1

Ein Code der Länge n über einem Alphabet $\mathbb{A}$ ist

eine Teilmenge von $\mathbb{A}^n$.

1.2

Der Hamming-Abstand zwischen `Siegen` und `Gießen` ist

2.

1.3

Der Minimalabstand $d(C)$ des Codes $C = \{10101, 01001, 10110\}$ ist

2.

1.4

Die projektive Ebene über einem Körper F ist die Menge

aller eindimensionalen Unteräume von F^3.

1.5

Die unkenntliche Stelle $*$ der ISBN 10-Nummer $111111111*$ ist

1.

1.6

Ein Code mit Minimalabstand 26 korrigiert maximal Fehler.

12.

1.7

Die Anzahl der linearen Codes der Länge 2 über $\mathbb{F}_2$ ist

5.

1.8

Ein Körper der Ordnung 4 ist zum Beispiel

$\mathbb{F}_2[x]/x^2 + x + 1$.

1.9

Die q-adische Entropie-Funktion (base-q entropy function) ist definiert als

$p \mapsto \lim_{n\to\infty} \frac{\log_q V_q(n,pn)}{n}$ für $0 \leq p \leq 1$.

1.10

Die Kontrollmatrix des linearen Codes $\{000, 101, 110, 011\}$ über $\mathbb{F}_2$ ist die folgende Matrix

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 Methoden

2.1

Sei C eine Hyperebene im $\mathbb{F}_2^n$ (d.h. die Menge der Lösungen $(x_1, \ldots, x_n)$ einer Gleichung $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, wobei $a := (a_1, \ldots, a_n)$ ein von 0 verschiedener vorgegebener Vektor im $\mathbb{F}_2^n$ ist). Berechnen Sie den Minimalabstand $d(C)$ von C in Abhängigkeit von a.

Hat a an der i-ten Stelle eine 0, so ist $c = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in C$, und daher $d(C) = 1$. Sinde alle Komponenten von C von 0 verschieden, so ist $(-a_2, a_1, 0, \ldots, 0) \in C$, aber kein Vektor mit nur einer von 0 verschiedenene Stelle; daher ist hier $d(C) = 2$.

2.2

Berechnen Sie das Polynom

$$\sum_{c \in \mathrm{H}(7,4)} X^{h(c)}.$$

Hierbei ist $\mathrm{H}(7,4)$ der Hamming-Code der Länge 7 und $h(c)$ das Hamming-Gewicht des Codewortes c.

Die projective Ebene $\mathbb{F}_2$ besteht aus 7 Geraden mit je Haimming-Gewicht 3, ihren 7 Komplementen mit Hamming-Gewicht 4, der leeren Menge (Hamming-Gewicht 0) und der Menge aller Punke (Hamming-Gewicht 7). Daher

$$\sum_{c \in \mathrm{H}(7,4)} X^{h(c)} = 1 + 7X^3 + 7X^4 + X^7.$$

2.3

Sei K eine Kontrollmatrix des linearen binären Codes C. Finden Sie eine Kontrollmatrix $\overline{K}$ des Codes $\overline{C}$, der durch Anfügen eines Paritätsbits an die Vektoren in C entsteht.

Die gesuchte Kontrollmatrix ist

$$\overline{K} = \begin{pmatrix} \ddots & & & 1 \\ & K & & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

.