6 Parkettierungen & Fundamentalbereiche

Seminar: Pro-/Seminar Arithmetik

Dozent: Prof. Dr. N-.P. Skoruppa

Referent: Lukas Wolf

Semester: SoSe 2015

6.1 Definition einer Parkettierung

- $X = \bigcup_l \Delta_l$, wobei X c E (Fundamentalbereich)
- Bedingungen für eine Parkettierung:

1) $\Delta_l = \overline{\mathring{\Delta}_l}$ (Abgeschlossenheit)

2) $\mathring{\Delta}_l$ zusammenhängende Teilmengen

3) $\mathring{\Delta}_l \cap \Delta_k \neq \emptyset$, l=k

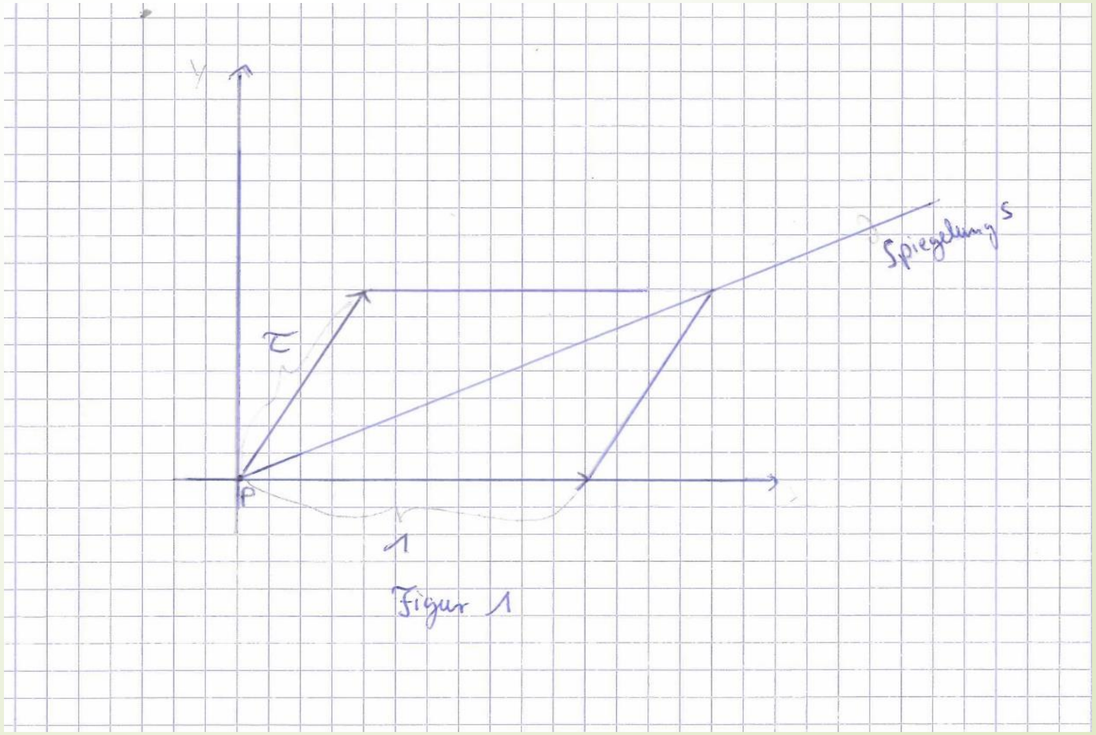
6.2 Definition eines Fundamentalbereichs

- Wir definieren zur Flächengruppe $\mathcal{G}$ den Fundamentalbereich mit:
- $E = \cup\, g(\Delta)$,mit $g \in \mathcal{G}$
- Satz: Ist $\mathcal{G}$ Flächengruppe, dann existiert ein Fundamentalbereich zu $\mathcal{G}$.

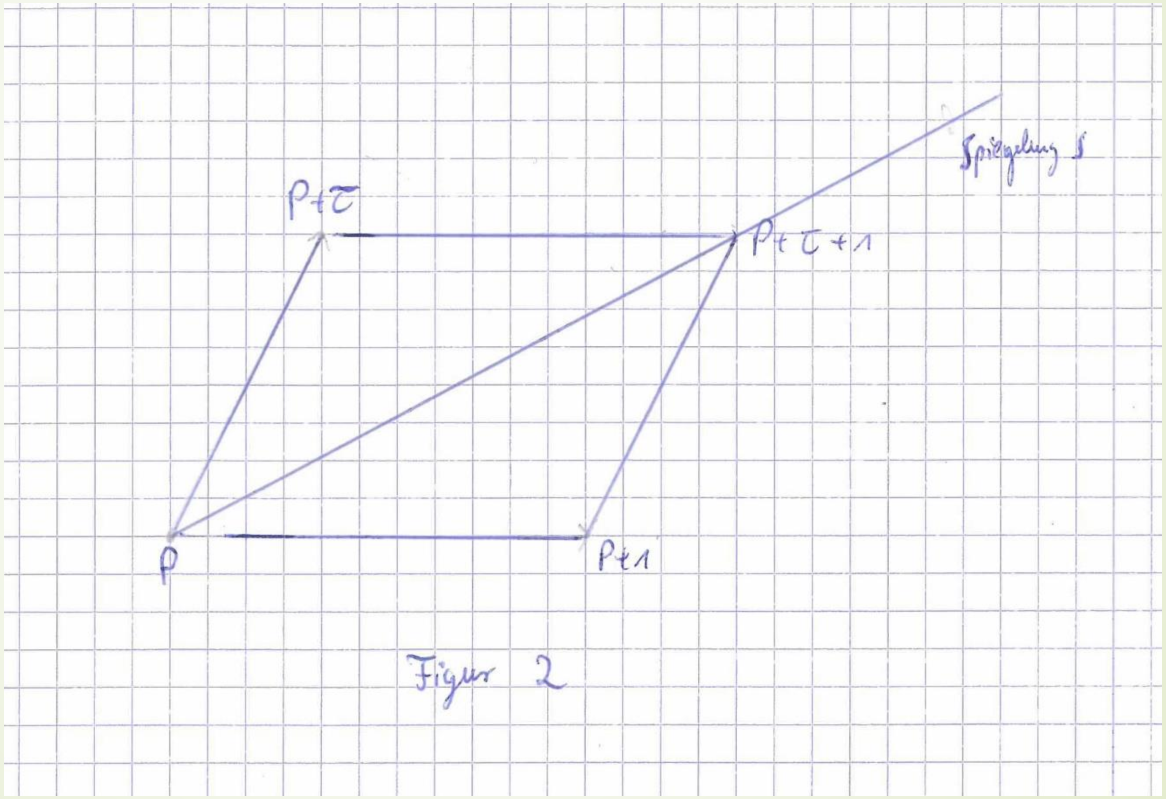
- Beweisidee: „Wir geben zunächst Fundamentalbereiche für Translationsgruppen an und gewinnen daraus durch Unterteilung Fundamentalbereiche für alle Flächengruppen.“ (Lamotke, S. 169)
- (I) Zeige den Satz der Translationsgruppen.
- (II) Beweis des allgemeinen Satzes durch weitere Unterteilung eines Fundamentalbereichs für Translationsgruppen.

Beispiel:

- Translationsgruppe $\mathcal{G}$, Gitter Γ
- Gewählte Translation: $\mathcal{T}$=<tz(zϵℤ+ℤτ),s(Spiegelung)>
- Gitterbasis 1:



Figur 2



Überlagerung der Flächengruppe

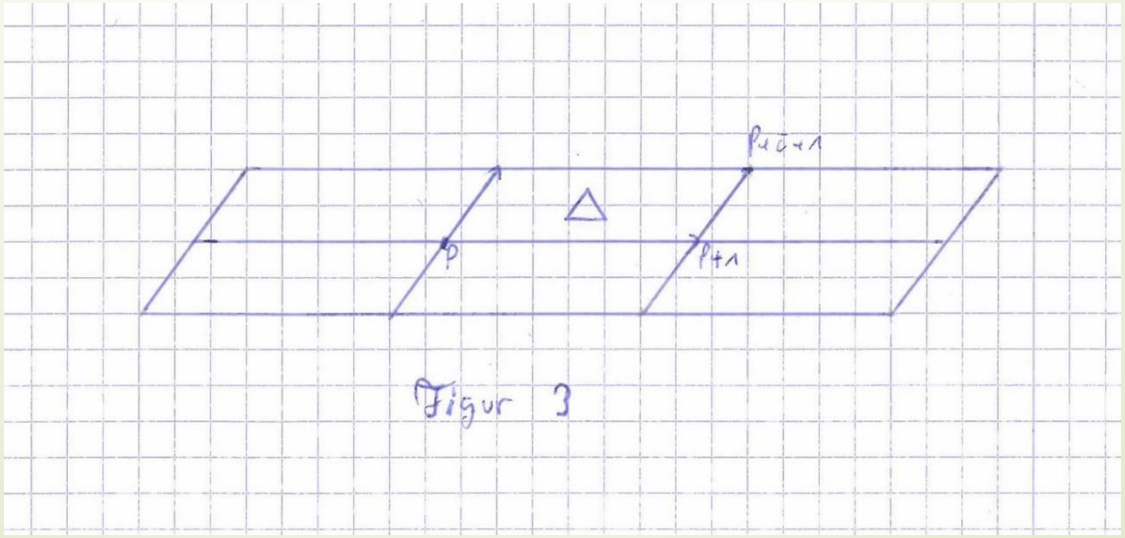
- 1. Schritt:

  Betrachte die Translationsgruppe:

$\mathcal{T}$=< tz | z ϵ ℤ+ℤτ >

In Anwendung: (Δ ist Fundamentalbereich für F)

Figur 3



Zum Beweis:

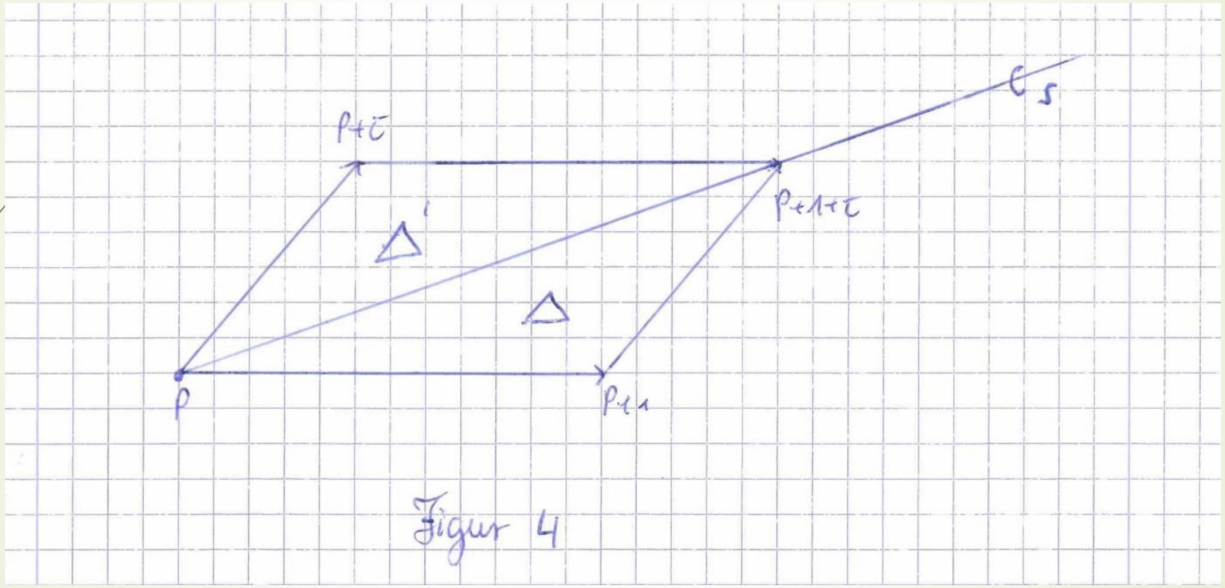
- a) $E = \bigcup z+\Delta'$, mit $z \in \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$
- b) $X = (z+\Delta)$ mit $z \in \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$

ist Parkettierung, d.h. 1)-3) aus Def. 6.1prüfen

2. Schritt: Betrachte die Spiegelung s

Δ ist Fundamentalbereich

Figur 4



Idee: Δ′ ist Fundamentalbereich für die ganze Gruppe $\mathcal{G}$.

Zum Beweis:

$E = \bigcup g(\Delta')$,mit $g \in \mathcal{G}$

-> in Folge 1)-3) (6.1) für die Familie von Mengen prüfen

- In Translation mit g entsteht Δ'

- Angenommen es gibt die Translationsgruppe $\mathcal{T} = \{t_z : z \in \Gamma\}$, wobei $\Gamma := \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$

- Als Fundamentalbereich kann man stets ein Fundamentalparallelogramm nehmen, d.h. man wählt ein $P \in E$ und setzt:

$$\Delta := \{P+x\alpha+y\beta \mid 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1\}$$

Dann ist Δ ein Fundamentalbereich und heißt Fundamentalparallelogramm für $\mathcal{T}$.

Bemerkung:

Zu zeigen:

a) $E = \bigcup z+\Delta$, mit $z \in \Gamma$

Beweis:

Sei $Q \in E$, dann ist z. z., dass für z: $Q \in \{z+\Delta\}$.

Es gibt jedenfalls reelle Zahlen ξ und η, sodass:

$Q = P + \xi a + \eta b$.

Setze $\xi_1 = \lfloor \xi \rfloor$ (ganzzahliger Anteil)

$\eta_1 = \lfloor \eta \rfloor$

- x und y seien die Nachkommastellen von ξ und η.
- $\xi = \xi_1 + x$, mit $x \in [0;1)$ und

  $\eta = \eta_1 + y$, mit $y \in [0;1)$.

Damit:

$Q = P + \xi_1 a + xa + \eta_1 b + yb = \xi_1 a + \eta_1 b + (P + xa + yb)$

$Z := (\xi_1 a + \eta_1 b) \in \Gamma$ und $(P + xa + yb) \in \Delta$

d.h. $Q = z + \Delta$, $z \in \Gamma$

- Bed. 2) und 3) aus Def. 6.1. sind einleuchtend

- Beweisteil b): Die Bedingungen 1)-3) sind erfüllt, sodass $(z+\Delta)$, $z \in \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ Parkettierung ist.

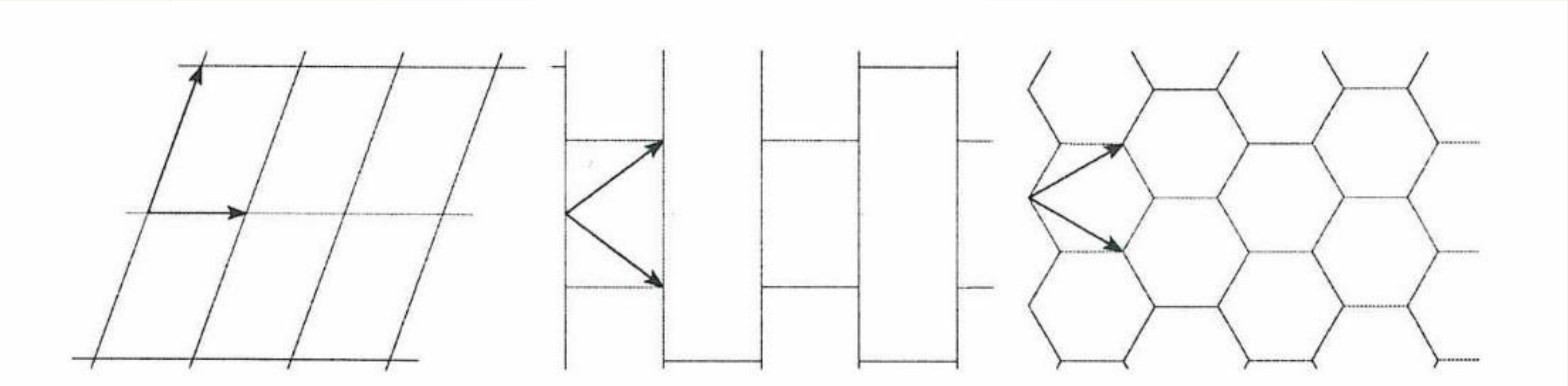
6.3 Parkettierungen in der Ebene durch Fundamentalbereiche einer Translationsgruppe $\mathcal{T}$

- Γ heißt rhombisch, falls eine Gitterbasis a,b existiert ($\Gamma := \mathbb{Z}a+\mathbb{Z}b$), sodass:

1) $|a|=|b|$

2) Winkel von a, b $\neq$ 60°, 90°

Grafische Beispiele (beliebiges, rhombisches und hexagonales Gitter)



- Alltagsgegenstand:

Flächengruppen

- $\prod$ ist Fundamentalbereich von $\mathcal{T}$

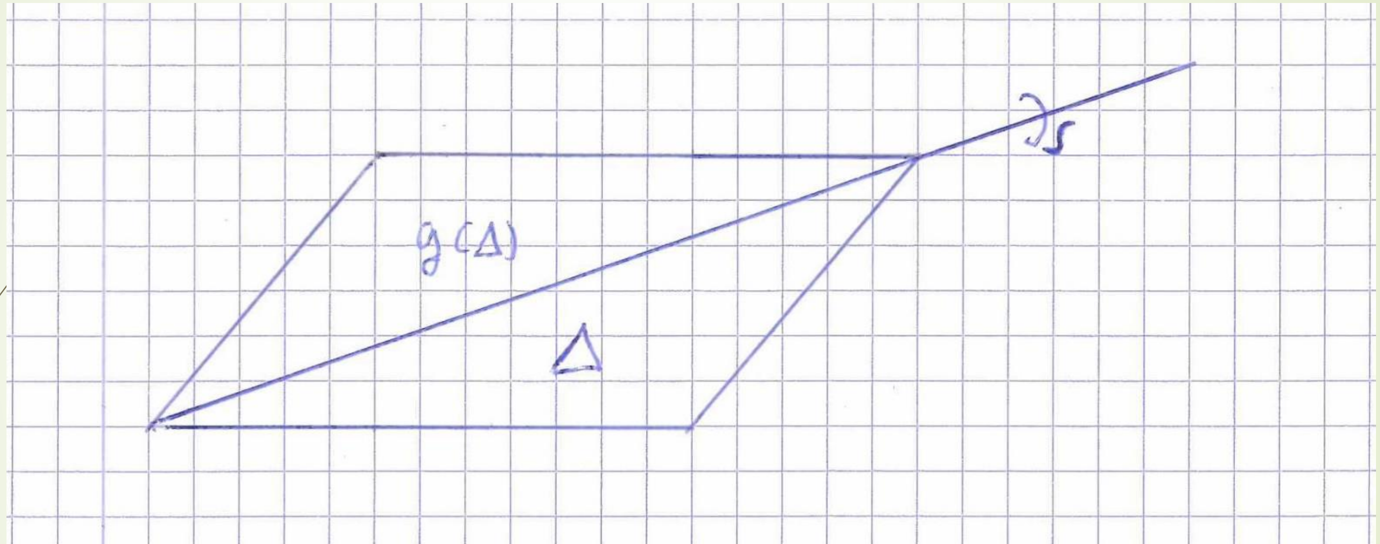
d.h. $E = \cup\, t(\pi)$, t ϵ $\mathcal{T}$

Es gilt:

$\mathcal{G} = \dot{U}\ \mathcal{T}$g, mit g ϵ $\mathcal{M}$

$\mathcal{T}\!\mathcal{T} = \cup$ g(Δ), mit g ϵ $\mathcal{M}$

Figur 5:



Figur 5

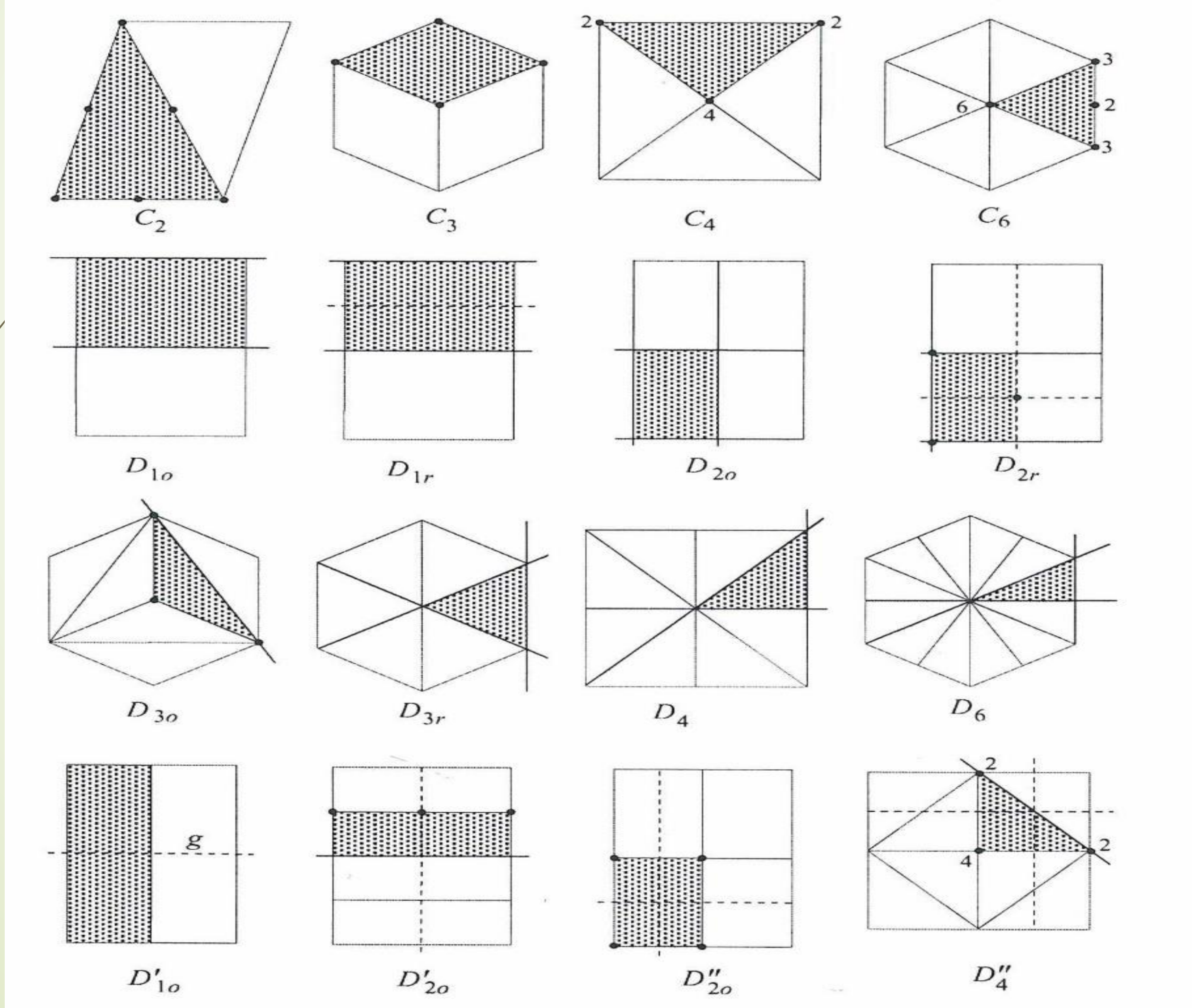
Es folgt:

$E = \cup\, t(\pi)$, t ∊ $\mathcal{T}$

$= U_{t \epsilon T}\ U_{t \epsilon M}$ t(g(Δ))

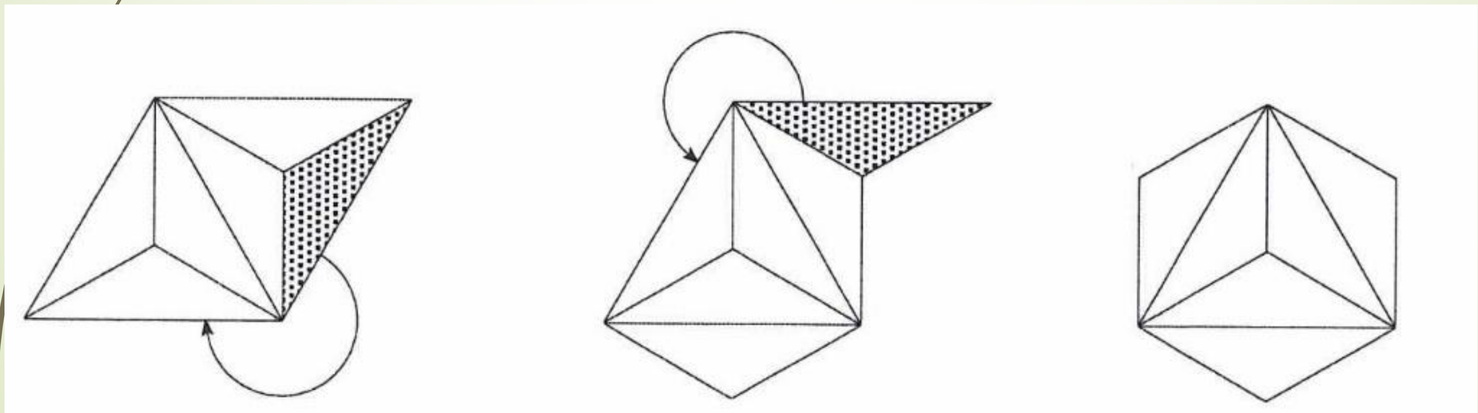
= U g(Δ), mit g ∊ $\mathcal{G}$

Fundamentalbereiche für 16 Flächengruppen



Umgestaltung

- Wenn G nicht zur Klasse D_{2o}, D_{3r}, D_4 oder D_6 gehört, liegen die Randpunkte des Fundamentalbereichs Δ nicht auf der Spiegelgeraden und Δ lässt sich umgestalten.



- Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit