ISOMETRIEN DER EUKLIDISCHEN EBENE

Referentin: Laura Schulte
Seminar: Pro-/Seminar zur Arithmetik
Dozent: Prof. Dr. Skoruppa
Semester: SoSe 2015
Datum:23.04.2015

Universität Siegen

INHALT

1. Ebenes Ornament

- $\kappa : E \rightarrow M$

- Definitionsbereich: euklidische Ebene E
- Wertebereich: Menge M

- Beispiel:
  - $\kappa : E \rightarrow M$
  - M die Menge aller Farben

1. Ebenes Ornament

- $\kappa : E \to M$

- Definitionsbereich: euklidische Ebene E
- Wertebereich: Menge M

- Betrachtung von Ornamenten κ, die bei $f : E \to E$ mit sich selbst zur Deckung kommen.
- $\kappa \circ f = \kappa$

WDH.: GRUPPE

„ Eine Gruppe besteht aus einer Menge G zusammen mit einer Verknüpfung ·(die je zwei Elementen aus G wieder ein Element aus G zuordnet), so dass folgende Axiome erfüllt sind :

(G1) Assoziativität:

Die Verknüpfung · ist assoziativ: $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$ für alle $g, h, k \in G$.

(G2) Existenz eines neutralen Elements:

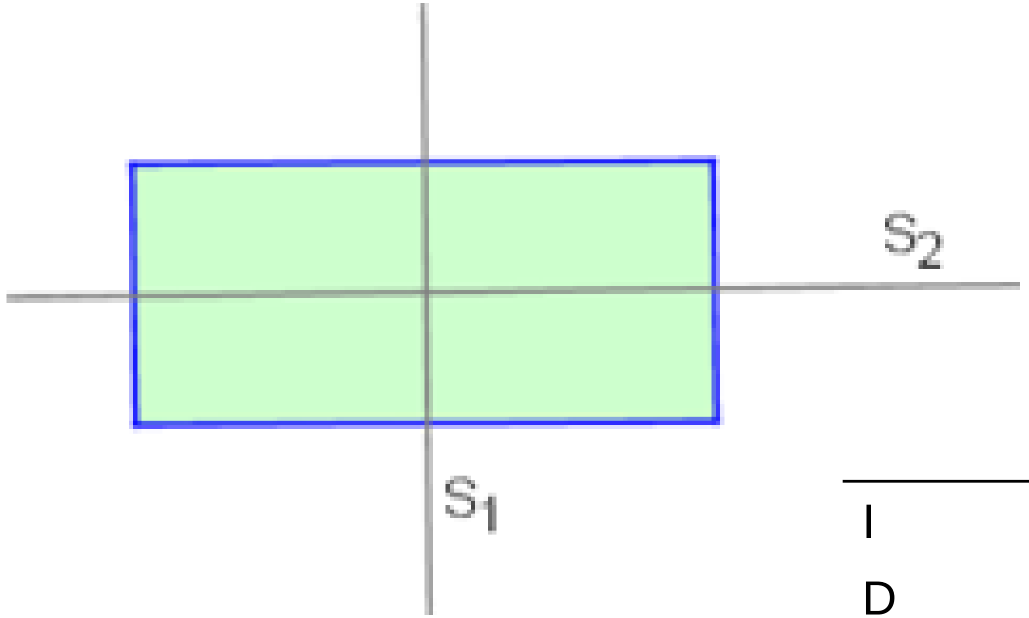
Es gibt ein Element aus G, das wir e nennen, für das gilt: $e \cdot g = g$ für alle $g \in G$.

(G3) *Existenz inverser Elemente:*

Für jedes $g \in G$ gibt es ein Element aus G, das wir g^{-1} nennen, für das gilt: $g^{-1} \cdot g = e$, wobei e das in (G2) geforderte neutrale Element ist.“

Beutelspacher, Albrecht: Lineare Algebra, Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen, Wiesbaden: Springer Spektrum, 8. Aufl, 2014, S. 271f.

BEISPIEL: RECHTECK



	I	D	S1	S2
I	I	D	S1	S2
D	D	I	S2	S1
S1	S1	S2	I	D
S2	S2	S1	D	I

http://www.mathepedia.de/Symmetriegruppen.aspx

1.1 Drehungen und Spiegelungen

- Allgemeines:

Wir benutzen $\mathbb{C}$ mit $z = x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und $i = \sqrt{-1}$

Realteil: $Re\, z \coloneqq x$

Imaginärteil: $\mathrm{Im}\, z \coloneqq y$

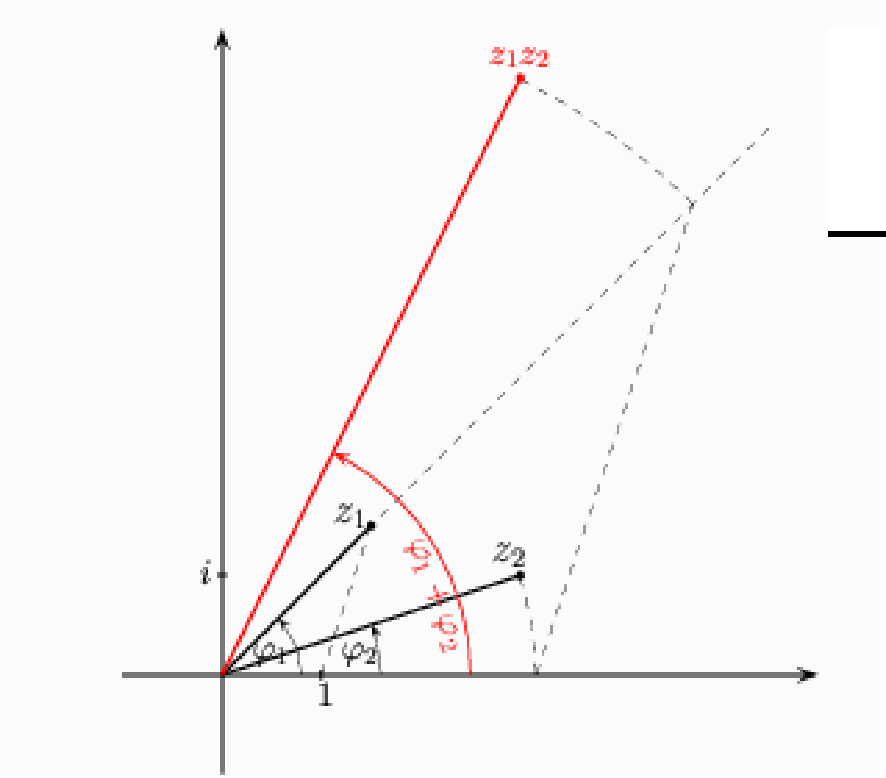
Komplex konjugierte Zahl: $\bar{z} = x - iy$

$\mathbb{C}$ wird zu einem zweidimensionalen euklidischen Vektorraum, wenn man das Skalarprodukt von $z\, und\, w$ durch $Re\,(z\overline{w})$ definiert.

1.1 Drehungen und Spiegelungen

Drehungen um den Winkel α : $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$p(z) = e^{i\alpha} z$$



$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

mathe-online.fernuni-hagen.de/MIB/HTML/node38.html

1.1 Drehungen und Spiegelungen

Drehungen um den Winkel α : $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$p(z) =$$

Spiegelungen: $\delta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\delta(z) = e^{i\alpha}\bar{z}$$

Spiegelachse L: reelle Gerade durch 0

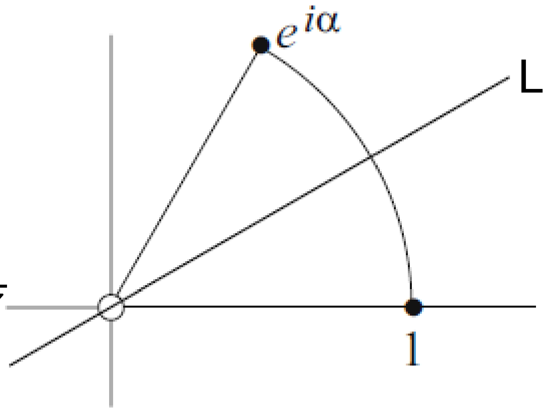


Fig. 1.1 Die Achse der Spiegelung $z \mapsto e^{i\alpha}\bar{z}$ ist die Winkelhalbierende

Sämtliche Drehungen und Spiegelungen bilden eine orthogonale Gruppe O.

EXKURS: ORTHOGONALE GRUPPE

„ Man nennt die Menge aller orthogonalen n × n-Matrizen (zusammen mit der Multiplikation von Matrizen) die orthogonale Gruppe und bezeichnet sie mit O(n).“

„Die Menge aller orthogonalen n× n-Matrizen mit Determinante + 1 heißt die spezielle orthogonale Gruppe und wird mit SO(n) bezeichnet.“

Beutelspacher, Albrecht: Lineare Algebra, Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen, Wiesbaden: Springer Spektrum, 8. Aufl, 2014, S. 319

1.1 Drehungen und Spiegelungen

- Sämtliche Drehungen und Spiegelungen bilden die orthogonale Gruppe O.
- Die Menge aller Drehungen ist ein Normalteiler SO◀ O vom Index zwei.

- Normalteiler:
  - N eine Untergruppe der Gruppe G
  - N heißt ein **Normalteiler** von G, falls für alle $g \in G$ gilt: $g^{-1}Ng = N$.
  - „ Eine Untergruppe N von G ist genau dann ein Normalteiler, falls für alle $g \in G$ gilt $gN = Ng$“

- Index:

„In mathematics, specifically group theory, the **index** of a subgroup H in a group G is the "relative size" of H in G: equivalently, the number of "copies" (cosets) of H that fill up G. For example, if H has index 2 in G, then intuitively "half" of the elements of G lie in H”

http://en.wikipedia.org/wiki/Index_of_a_subgroup

Beutelspacher, Albrecht: Lineare Algebra, Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen, Wiesbaden: Springer Spektrum, 8. Aufl, 2014, S. 286f.

1.1 Drehungen und Spiegelungen

- Sämtliche Drehungen und Spiegelungen bilden die orthogonale Gruppe O.
- Die Menge aller Drehungen ist ein Normalteiler $SO \triangleleft O$ vom Index zwei.
- In jeder Untergruppe $G < O$ bilden alle Drehungen den Normalteiler $SG := G \cap SO \triangleleft G$ vom Index eins oder zwei.

1.2 Zyklische Gruppen und Diedergruppen

- *Jede endliche Untergruppe G $< O$ ist eine zyklische Gruppe $C_n$oder eine DiedergruppeD_n, n=1,…*
- *Die zyklische Gruppe C_n besteht aus n Drehungen um die Winkel $\frac{2\pi k}{n}$ für $k \in \mathbb{Z}$*
- *Jede DiedergruppeD_n enthält n Drehungen und n Spiegelungen.*
- *Die Drehungen in D_n bilden die Gruppe C_n.*
- *Je zwei benachbarte Spiegelachsen der Spiegelungen in D_n schließen den Winkel $\frac{\pi}{n}$ ein.*

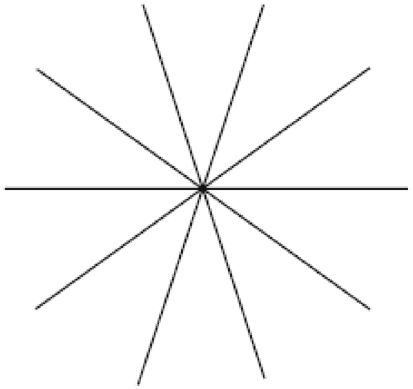


Fig. 1.2 Die Spiegelachsen einer Diedergruppe D_5. Je zwei benachbarte Achsen schließen den Winkel $\pi/5$ ein

1.2 Zyklische Gruppen und Diedergruppen Beweis

- Jedes Element in SG hat einen eindeutig bestimmten Drehwinkel in (0,2π].
- Wegen der Endlichkeit gibt es eine Drehung $p \in SG$ mit minimalem Drehwinkel α.
- Die Gruppe SG wird durch diese Drehung p erzeugt.
- Aus $\mathrm{n} \coloneqq \#SG$ folgt $\propto = \frac{2\pi}{n}$
- Wenn es keine Spiegelung gibt, ist $G = SG = C_n$
- Sonst gibt es n Spiegelungen in G.
- Aus 1.1 (Drehungen und Spiegelungen) folgt, dass ihre Achsen die beschriebene Konfiguration bilden. □

1.2 Zyklische Gruppen und Diedergruppen Beispiel

http://de.wikipedia.org/wiki/Diedergruppe#/media/File:Dihedral8.png

1.3 Punktornamente

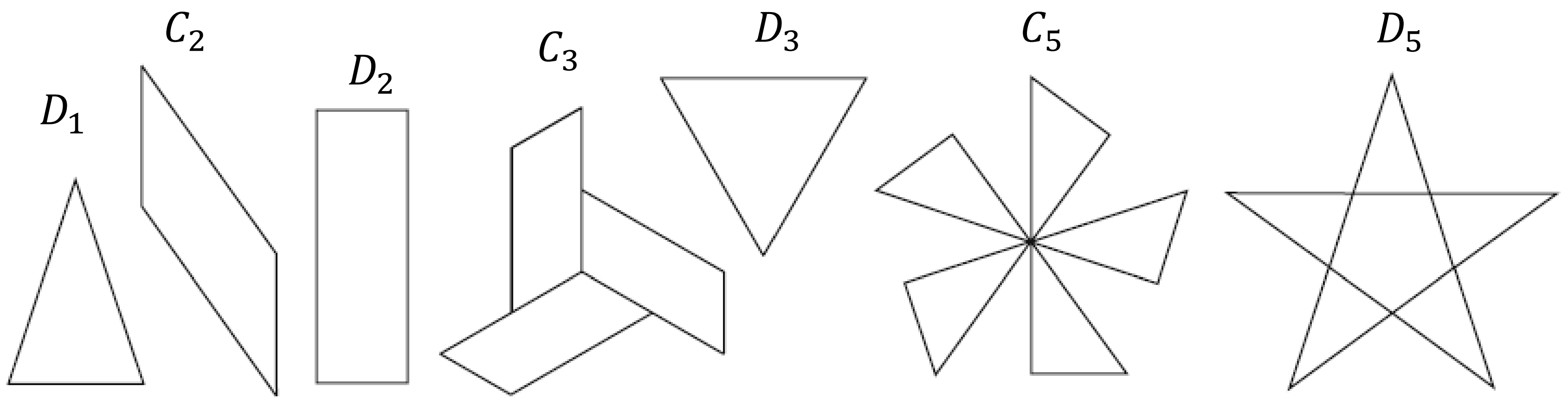
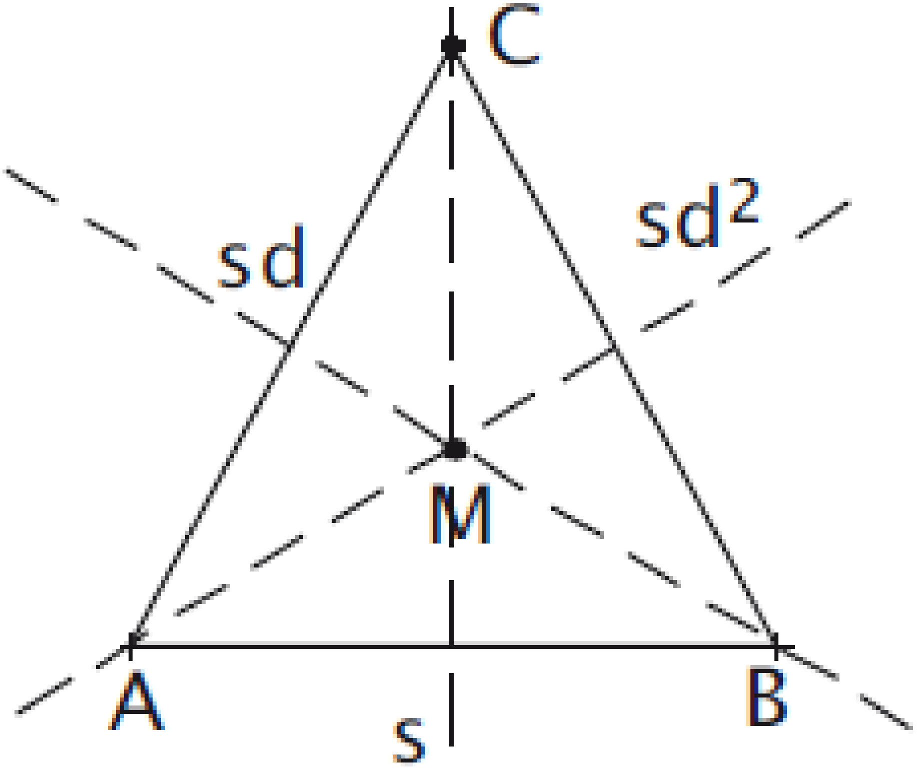


Fig. 1.3 Ornamente mit den Symmetriegruppen D_1, C_2, D_2, C_3, D_3, C_5, D_5. Das Zentrum liegt jeweils im Schwerpunkt der Figur

Ornamente: $\kappa\colon \mathbb{C} \to \{schwarz, weiß\}$

1.3 Punktornamente



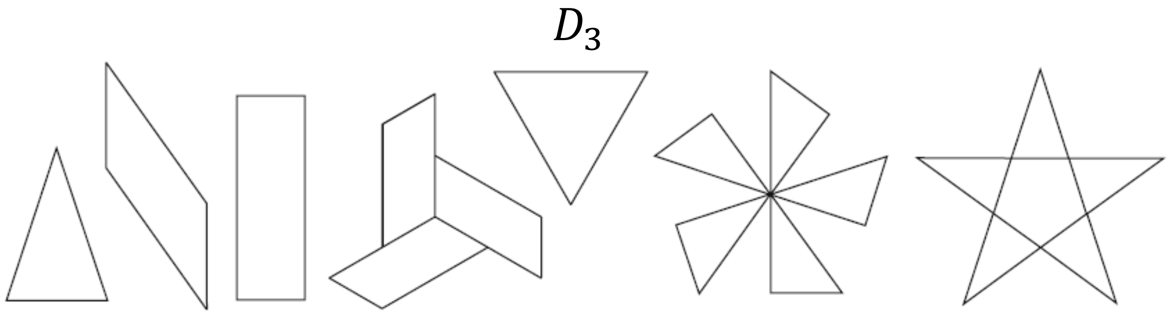


Fig. 1.3 Ornamente mit den Symmetriegruppen D_1, C_2, D_2, C_3, D_3, C_5, D_5. Das Zentrum liegt jeweils im Schwerpunkt der Figur

Krauter, S.; Bescherer, C.: Erlebnis Elementargeometrie, Heidelberg: Springer-Verlag, 2. Aufl, 2013, S. 52

2. Isometrien

- Translationen als Isometrien
- In der euklidische Ebene E gibt es keinen ausgezeichneten Ursprung wie $0 \in \mathbb{C}$, deshalb identifizieren wir E nicht von vorne herein mit $\mathbb{C}$

2.1 TRANSLATIONEN

- $P \in E$ ein Punkt, $z \in \mathbb{C}$ ein Vektor,
- $Q = P + z \in E$
- Zu $P, Q \in E$ gibt es genau ein $z \in \mathbb{C}$ mit $Q = P + z$
- Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Translation $t_z : E \to E$ bijektiv.
  $t_z(P) = P + z$
- $t_z \circ t_w = t_{z+w}$

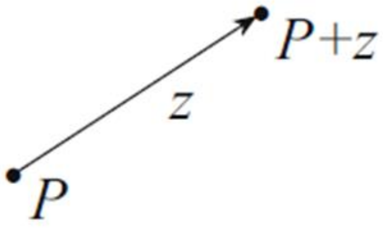


Fig. 2.1 Translation des Punktes $P \in E$ in den Punkt $t_z(P) := P + z$

2.2 Isometrien

- *Eine Abbildung $f\colon E \to E$ heißt Isomerie, wenn es zu jedem Punkt $P \in E$ eine orthogonale Abbildung $f_* \in O$ gibt, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$f(P + z) = f(P) + f_*(z)$$

Beweis:

- Die orthogonale Abbildung f_* ist durch f eindeutig bestimmt und hängt nicht von P ab.
- Alle Isometrien bilden mit der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung eine Gruppe I. Die Zuordnung $\mathrm{I} \to \mathrm{O}$ mit $\mathrm{f} \mapsto \mathrm{f}_*$ ist ein Epimorphismus, dessen Kern der Normalteiler $\mathrm{T} \coloneqq \{\mathrm{t_z}\colon \mathrm{z} \in \mathbb{C}\}$ aller Translationen ist.
- Es gilt $\mathrm{f} \circ \mathrm{t_z} \circ \mathrm{f}^{-1} = \mathrm{t}_{\mathrm{f}_*(\mathrm{z})}$ für alle $\mathrm{f} \in \mathrm{I}$ und $\mathrm{z} \in \mathbb{C}$ □

2.2 Isometrien

- Wenn $f_* = \varphi$ ist, sagt man:

  Die orthogonale Transformation φ wird durch die Isometrie f *realisiert.*

- Man nennt I die Isometriegruppe der Ebene E.
- Zu jeder Untergruppe G < I gehört ihre orthogonale Gruppe $G_* \coloneqq \{f_* : f \in G\} < O$.
- Abstand zwischen den Punkten P und $Q = P + z$: $d(P, Q) \coloneqq |z|$
  Damit wird E zu einem metrischen Raum.
- Für jede Isometrie f gilt $d\big(f(P), f(Q)\big) = d(P, Q)$ für alle $P, Q \in E$ (*)
- Umgekehrt gilt:
  Jede Abbildung $\mathrm{f} \colon \mathrm{E} \to \mathrm{E}$, die (*) erfüllt, ist eine Isometrie im oben definierten Sinne.

2.3 DREHUNGEN

- *Jede Isometrie $f \in I$ mit $f_*(z) = e^{i\alpha}z$ und $e^{i\alpha} \neq 1$ hat genau einen Fixpunkt P.*
- Beweis:
  - Man wählt einen Basispunkt $\mathrm{Q} \in \mathrm{E}$
  - Definiere $\mathrm{w} \in \mathbb{C}$ durch $f(Q) = Q + w$
  - $f(Q+z) = Q + w + e^{i\alpha}z$
  - Für $P = Q + z$ tritt $f(P) = P$ genau dann ein, wenn $z = \frac{w}{1-e^{i\alpha}}$ ist.

$f(Q+z) = Q + w + e^{i\alpha}z$ mit $P = Q + zf($

$Q + w + e^{i\alpha}z$

Ziel: $Q + w + e^{i\alpha}z = \mathrm{P}$

$Q + w + e^{i\alpha}z = Q + z$

$w + e^{i\alpha}z = z$

$\mathrm{w} = \mathrm{z} - e^{i\alpha}z$

$w = z(1 - e^{i\alpha})$

$z = \dfrac{w}{1 - e^{i\alpha}}$

2.3 Drehungen

- *Jede Isometrie* $f \in I$ *mit* $f_*(z) = e^{i\alpha}z$ *und* $e^{i\alpha} \neq 1$ *hat genau einen Fixpunkt P.*
- *Die Isometrie* $f(P + z) = P + e^{i\alpha}z$ *(P,* α *fest,* $z \in \mathbb{C}$*) wird* α*- Drehung um* P *genannt.*

2.4 Spiegelungen und Gleitspiegelungen

- Sei $P \in E$
- Sei $\sigma \in O$ eine Spiegelung an der Achse $\mathrm{L} \subset \mathbb{C}$
- Die Isometrie $s: E \to E, \; s(P+z) \coloneqq P + \sigma(z)$ heißt Spiegelung an der Geraden
$$P + L \coloneqq \{P + z : z \in L\}$$
Diese Gerade ist die Fixpunktmenge von s und heißt Spiegelachse
- Für jeden Vektor $\mathrm{w} \in L, w \neq 0$ nennt man $g \coloneqq s \circ t_w = t_w \circ s$ eine Gleitspiegelung an der Achse P+L mit dem Gleitvektor w.
- Es gilt $g_* = s_* = \sigma$ und $g^2 = t_{2w}$
- Gleitspiegelungen haben keine Fixpunkte.

Fig. 2.4 Ein Blatt mit seinem Spiegelbild links und mit seinem Gleitspiegelbild rechts. Der Gleitvektor ist w

2.4 Spiegelungen und Gleitspiegelungen

- ***Satz:*** *Jede Isometrie $f \in I$ mit $\sigma := f_* \notin SO$ ist eine Spiegelung oder Gleitspiegelung*

  □

- Beweis:
  - i) Wenn f einen Fixpunkt P hat, ist $f(P+z) = P + \sigma(z)$ eine Spiegelung
  - ii) Im allgemeinen Fall sei $\mathrm{L} \subset \mathbb{C}$ die Achse von σ.

    Sei $\mathrm{Q} \in E$ und $f(Q) = Q + 2w$.

    Dann ist $u := w + \sigma(w) \in L$ und $s := t_{-u} \circ f$ hat den Fixpunkt $P := Q + w$

    Nach i) ist s eine Spiegelung.

2.5 Produkte von Spiegelungen, Drehungen und Translationen

(1) *Wenn sich zwei Spiegelachsen a und b im Punkt P unter dem Winkel* α *schneiden, ist das Produkt der entsprechenden Spiegelungen* $r \coloneqq s_a \circ s_b$ die 2α-Drehung um P.

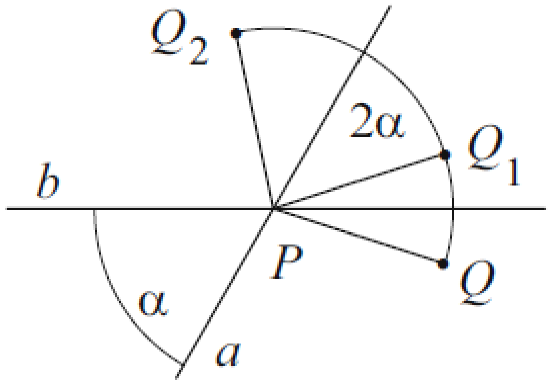


Fig. 2.5 Links: Die Hintereinanderschaltung der Spiegelungen s_a, s_b an den Geraden a, b ist die 2α-Drehung r um P, also $r(Q) = Q_2 = s_a(Q_1) = s_a s_b(Q)$

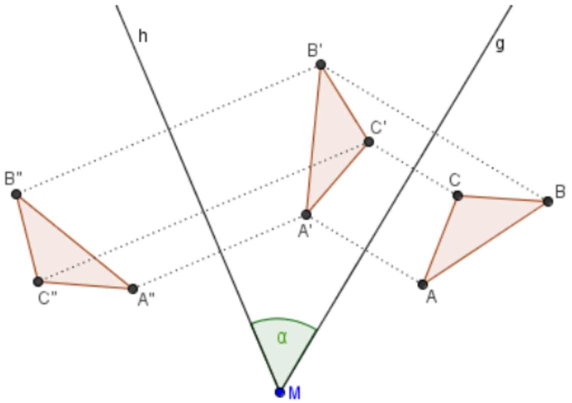


Abb. 2.10: Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen an zwei sich schneidenden Geraden

2.5 Produkte von Spiegelungen, Drehungen und Translationen

(2) *Für jedes Dreieck ABC ist das Produkt* $r_a \circ r_b \circ r_c$ der 2α- Drehung $r_a$um A, der 2β- Drehung $r_B$um B und der 2γ- Drehung $r_C$um C die Identität.

Beweis:

$$r_a = s_b \circ s_c$$
$$r_b = s_a \circ s_c$$
$$r_c = s_a \circ s_b$$

$$r_a \circ r_b \circ r_c = s_b \circ s_c \circ s_a \circ s_c \circ s_a \circ s_b$$
$$r_a \circ r_b \circ r_c = s_a \circ s_a \circ s_b \circ s_b \circ s_c \circ s_c$$

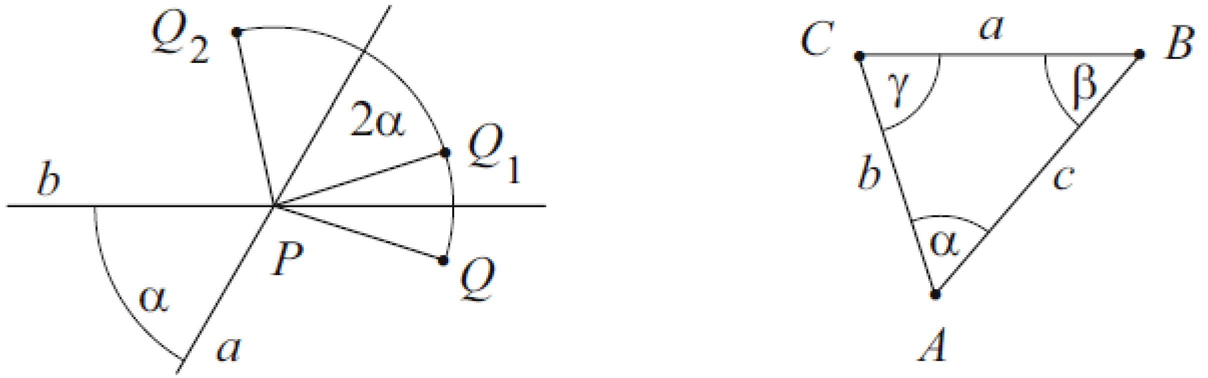


Fig. 2.5 Links: Die Hintereinanderschaltung der Spiegelungen s_a, s_b an den Geraden a, b ist die 2α-Drehung r um P, also $r(Q) = Q_2 = s_a(Q_1) = s_a s_b(Q)$
Mitte: Die 2γ-Drehung um C gefolgt von der 2β-Drehung um B ist die (-2α)-Drehung um A

2.5 Produkte von Spiegelungen, Drehungen und Translationen

(3) *Bei einem gleichschenkligen Dreieck mit der Spitze P gilt* $t_z \circ r_Q = r_p$ für die α- Drehungen r_Q, r_p um Q bzw. P und für die Translation t_z.

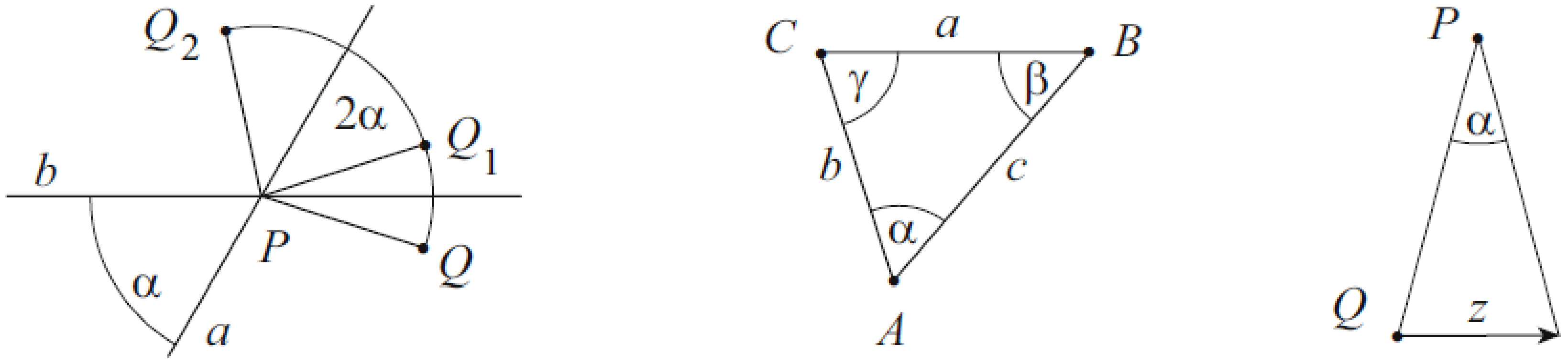


Fig. 2.5 Links: Die Hintereinanderschaltung der Spiegelungen s_a, s_b an den Geraden a, b ist die 2α-Drehung r um P, also $r(Q) = Q_2 = s_a(Q_1) = s_a s_b(Q)$
Mitte: Die 2γ-Drehung um C gefolgt von der 2β-Drehung um B ist die (-2α)-Drehung um A
Rechts: Für die α-Drehungen r_P, r_Q um P bzw. Q gilt $t_z \circ r_Q = r_P$

2.5 Produkte von Spiegelungen, Drehungen und Translationen

(4) *Wenn zwei Drehungen* r_A $und r_B$ verschiedene Fixpunkte $\mathrm{A} \neq B$ haben, ist $r_A r_B r_A^{-1} r_B^{-1}$ eine Translation $\neq id$

Beweis:

Nach (2) sind $\mathrm{r_Q} \coloneqq \mathrm{r_A r_B}$ und $\mathrm{r_p} \coloneqq \mathrm{r_B r_A}$ Drehungen um denselben Winkel.

Sie haben jedoch verschiedene Drehpunkte (Q und P).

Deshalb folgt aus (3) die Behauptung.

QUELLENANGABEN

- **Lamotke, Klaus:** Die Symmetriegruppen der ebenen Ornamente, 2005

- http://www.mathepedia.de/Symmetriegruppen.aspx
- http://en.wikipedia.org/wiki/Index_of_a_subgroup
- http://de.wikipedia.org/wiki/Diedergruppe#/media/File:Dihedral8.png
- http://www.cevis.uni-bremen.de/Binaries/Binary1886/Kap2KonAbb.pdf
- mathe-online.fernuni-hagen.de/MIB/HTML/node38.html
- Beutelspacher, Albrecht: Lineare Algebra, Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen, Wiesbaden: Springer Spektrum, 8. Aufl, 2014
- Krauter, S.; Bescherer, C.: Erlebnis Elementargeometrie, Heidelberg: Springer-Verlag, 2. Aufl, 2013