Gitter und ihre Symmetrien

Seminar zu Arithmetik

Ein Referat von

Pia Schäfer

Für jede reelle Basis a,b von $\mathbb{C}$ nennt man die additive Untergruppe

$$\Gamma = \mathbb{Z} * a + \mathbb{Z} * b = \{ma + nb : m, n \in \mathbb{Z}\} < \mathbb{C}$$

ein *Gitter*.

Eine Untergruppe von I heißt *Flächengruppe,* wenn ihre Translationsvektoren ein Gitter bilden.

Minimale Vektoren

Satz:

Jede nicht-leere Teilmenge $M \subset \Gamma$ eines Gitters Γ enthält einen *minimalen Vektor*

d.h. einen Vektor a mit $|a| \leq |z|$ für alle $z \in M$

Beweis: Für jedes $s > 0$ ist $B := \{z \in \Gamma : |z| \leq s\}$ endlich.

Sei $\Gamma = \mathbb{Z} * a + \mathbb{Z} * b$. Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \, f(x, y) := |xa + yb^2|$$

nimmt auf der Kreislinie mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$

ein Minimum $m > 0$ an.

Dann gilt

$$f(x, y) \geq m * (x^2 + y^2)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Aus $xa + yb \in B$ folgt

$$m * (x^2 + y^2) \leq f(x, y) \leq s^2$$

Wegen $x, y \in \mathbb{Z}$ sind nur endlich viele

Koeffizienten x, y möglich.

$\square$

Quadratische und hexagonale Gitter

Man nennt $\varphi \in 0$ eine *Symmetrie* des Gitters Γ , wenn $\varphi(\Gamma) = \Gamma$ ist.

Alle Symmetrien bilden die Symmetriegruppe $\sum(\Gamma) < 0$.

Jedes Gitter besitzt die Symmetrien $\pm id$.

Sämtliche Drehsymmetrien eines Gitters Γ bilden eine zyklische Gruppe, die zu C_2, C_4 oder C_6 isomorph ist.

Beweis: Sei c minimaler Vektor in $\Gamma\setminus\{0\}$.

Auf der Kreislinie $S\subset\mathbb{C}$ mit der Gleichung $|z|=|c|$ liegen höchstens sechs Gitterpunkte.

Gäbe es mehr als 6 Punkte, so hätten zwei Benachbarte, nennen wir sie a,b, Einen Abstand Ia-bI, der kleiner ist als die Kante eines regulären Sechsecks mit Ecken auf S.

Diese Kantenlänge eines regulären Sechsecks auf S ist IcI.
Also gäbe es sonst zwei Gitterpunkte a,b mit $0<|a-b|<|c|$, was der Minimalität von c widerspricht.

Da mit jedem $c \in \Gamma$ auch $-c$ zu Γ gehört, ist die Anzahl der Gitterpunkte auf S gerade, also = 2,4 oder 6. Angenommen, $z \to az$ mit $|a| = 1$ ist eine Drehsymmetrie von Γ. Dann liegen auf S die Gitterpunkte $a^n c$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Je nachdem ob es auf S zwei, vier oder sechs Gitterpunkte gibt, ist

$a \in \{\pm 1\}, \in \{\pm 1, \pm i\}$

oder

$\in \{\pm 1, \pm \omega, \pm \omega^{-1}\}\, mit\, \omega := \mathrm{e}^{\pi i/3}$

Da alle Drehsymmetrien von Γ eine Gruppe bilden, kommen wegen zuvor genanntem nur die Gruppen C_2, C_4 oder C_6 in Frage.

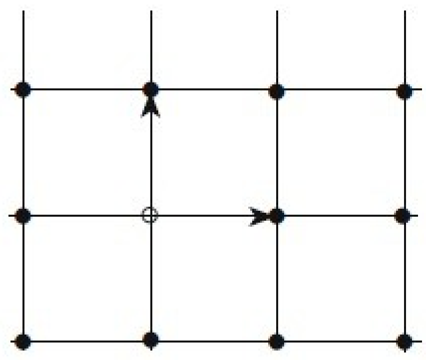
$\square$

- Gitter mit der Drehsymmetriegruppe C_4 heißen *quadratisch*
  - Als Basis von Γ kann man $(c\,, ic)$ mit minimalem c wählen
- Gitter mit der Drehsymmetriegruppe C_6 heißen *hexagonal*
  - Als Basis von Γ kann man $(c\,, \omega c)$ mit minimalem c wählen

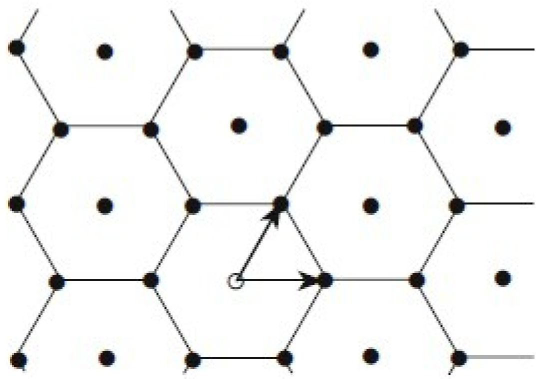
$\rightarrow$ In beiden Fällen ist die Spiegelung an der Achse $\mathbb{R} * c$ auch eine Symmetrie von Γ.

Daher ist die Symmetriegruppe die Diedergruppe D_4 oder D_6

Gitter



quadratisch



hexagonal

Spiegelsymmetrien

Mit jeder Spiegelung $\sigma \in \sum(\Gamma)$ gehört auch $-\sigma$ zu $\sum(\Gamma)$.

Die Achsen $L_{\pm}$ von $\pm\sigma$ schneiden sich senkrecht.

Für jedes $c \in \Gamma$ ist $c \pm \sigma(c) \in L_{\pm}$.

Die Spiegelsymmetrie $\sigma \in \sum(\Gamma)$ heißt *orthogonal*, wenn Γ eine Basis a, b mit $\sigma(a) = a$ und $\sigma(b) = -b$ besitzt.

Sie heißt *rhombisch*, wenn es eine Basis der Gestalt $c, \sigma(c)$ gibt.

Spiegelsymmetrien

Mit jeder Spiegelung $\sigma \in \sum(\Gamma)$ gehört auch $-\sigma$ zu $\sum(\Gamma)$.

Die Achsen $L_{\pm}$ von $\pm\sigma$ schneiden sich senkrecht.

Für jedes $c \in \Gamma$ ist $c \pm \sigma(c) \in L_{\pm}$.

Die Spiegel

wenn Γ ein

besitzt.

Sie heißt *rh*

Gestalt c, σ

(a,b) bzw. (c,σ(c)) heißt σ-Basis

Satz: Jede Spiegelsymmetrie ist entweder orthogonal oder rhombisch.

Bemerkung: Ist σ orthogonal (rhombisch),

so ist auch -σ orthogonal (rhombisch).

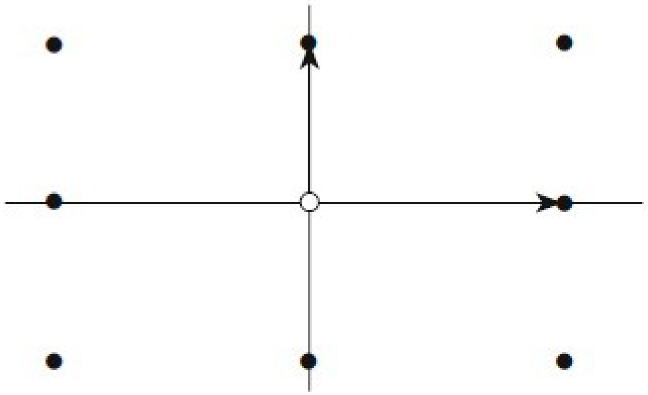
Beweis: Es ist die Existenz einer σ-Basis zu zeigen.

Seien a bzw. b die minimalen Elemente von $L_+ \cap \Gamma \setminus \{0\}$ bzw. $L_- \cap \Gamma \setminus \{0\}$.

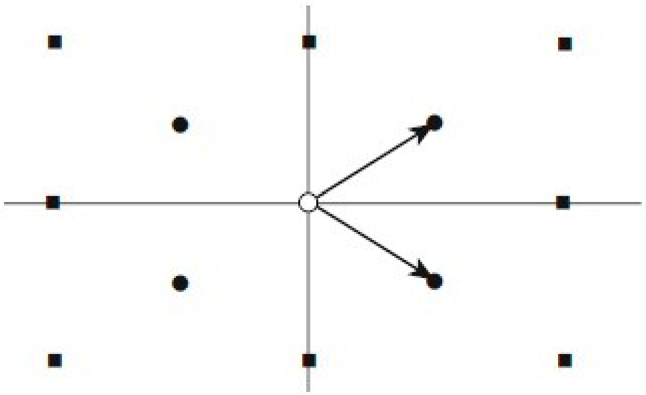
Wenn $\mathbb{Z} * a + \mathbb{Z} * b = \Gamma$ ist, ist σ per Definition orthogonal.

Wenn $\mathbb{Z} * a + \mathbb{Z} * b \neq \Gamma$ ist, ist σ rhombisch.

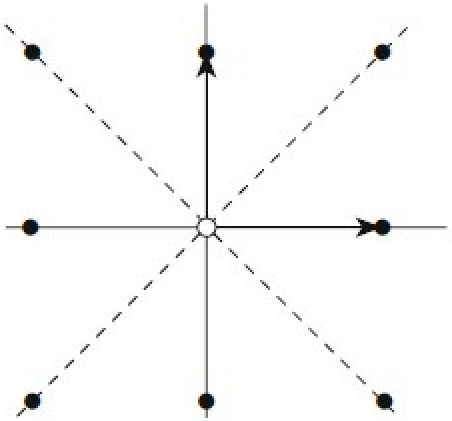
Spiegelachsen eines ...



Orthogonalen ...



Rhombischen ...



Quadratischen...

Gitters

Symmetriepaare

Ein Gitter Γ zusammen mit einer Untergruppe $G < \sum(\Gamma)$ nennen wir ein *Symmetriepaar* (Γ, G) .
Um alle möglichen Paare zu klassifizieren, wird folgende Äquivalenzrelation geführt:

Zwei Paare (Γ, G) und (Γ', G') heißen linear äquivalent, wenn es eine reell lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, so dass $\Gamma' = \Phi(\Gamma)$ und $G' = \Phi G \Phi^{-1}$ ($\{\Phi \circ \gamma \circ \Phi^{-1} \mid \gamma \in G\}$) gelten.

Satz: Durch die lineare Äquivalenz werden die Symmertriepaare in 13 disjunkte Klassen

$$\underline{C_1} \quad \underline{C_2} \quad \underline{C_3} \quad \underline{C_4} \quad \underline{C_6} \quad \frac{D_{1o}}{\underline{D_{1r}}} \quad \frac{D_{2o}}{\underline{D_{2r}}} \quad \frac{D_{3o}}{\underline{D_{3r}}} \quad \underline{D_4} \quad \underline{D_6}$$

eingeteilt,

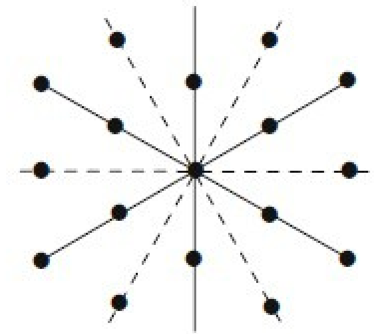
die folgendermaßen definiert sind:

$\left(\Gamma, G\right) \in \underline{C_n} \quad \Leftrightarrow \quad G = C_n,\, n = 1,2,3,4,6.$
$\left(\Gamma, G\right) \in \underline{D_n} \quad \Leftrightarrow \quad G \textit{ ist die } n - \textit{Diedergruppe } D_n, \quad n = 4,6.$
$\left(\Gamma, G\right) \in \underline{D_{1\mathrm{o}}} \quad \Leftrightarrow \quad G \textit{ ist eine } 1 - \textit{Diedergruppe ; die Spiegelsymmetrie } \sigma \in G \textit{ ist orthogonal.}$
$\left(\Gamma, G\right) \in \underline{D_{1\mathrm{r}}} \quad \Leftrightarrow \quad G \textit{ ist eine } 1 - \textit{Diedergruppe ; die Spiegelsymmetrie } \sigma \in G \textit{ ist rhombisch.}$
$\left(\Gamma, G\right) \in \underline{D_{2\mathrm{o}}} \quad \Leftrightarrow \quad G \textit{ ist eine } 2 - \textit{Diedergruppe ; beide Spiegelsymmetrien } \pm\sigma \in G \textit{ sind orthogonal.}$
$\left(\Gamma, G\right) \in \underline{D_{2\mathrm{r}}} \quad \Leftrightarrow \quad G \textit{ ist eine } 2 - \textit{Diedergruppe ; beide Spiegelsymmetrien } \pm\sigma \in G \textit{ sind rhombisch.}$

Zu D_{30} und D_{3r}:
Wenn Γ hexagonal ist, besitzt $\sum(\Gamma)$ zwei 3-Dieder-Untergruppen Σ_0 und $\sum_r$,
die sich dadurch unterscheiden, dass die sechs minimalen Elemente von $\Gamma \setminus \{0\}$ auf den Spiegelachsen von $\sum_0$ liegen und keines auf einer Spiegelachse von $\sum_r$ liegt.

Man definiert

$$\left(\Gamma, G\right) \in D_{3\mathrm{o}} \quad \Leftrightarrow \quad G = \sum\nolimits_o ; \quad \left(\Gamma, G\right) \in D_{3\mathrm{r}} \quad \Leftrightarrow \quad G = \sum\nolimits_r .$$



Wenn Γ hexagonal ist, besitzt $\sum(\Gamma)$ zwei 3-Dieder-Untergruppen $\sum_0$ und $\sum_r$,
die sich dadurch unterscheiden, dass die sechs minimalen Elemente von $\Gamma\setminus\{0\}$ auf den Spiegelachsen von $\sum_0$ liegen und keines auf einer Spiegelachse von $\sum_r$ liegt.

Man definiert

$$(\Gamma, G) \in D_{3\mathrm{o}} \iff G = \sum\nolimits_o ; \quad (\Gamma, G) \in D_{3\mathrm{r}} \iff G = \sum\nolimits_r$$

Beweisskizze:

Wir haben gesehen: Zu gegebenem Γ ist $\Sigma(\Gamma)$ stets eine der Gruppen:

C_n oder D_n mit n=1,2,3,4,6

Ist daher (Γ, G) ein Symmetriepaar, so kommt (Γ, G) in einer der zuvor genannten 13 definierten Mengen $\underline{C}_1$, $\underline{C}_2$, …, $\underline{D}_4$, $\underline{D}_6$ vor.

Es bleibt also zu zeigen, dass die Mengen

K: $\underline{C}_1$, $\underline{C}_2$, …, $\underline{D}_4$, $\underline{D}_6$ Äquivalenzklassen sind.

D.h. es ist zu zeigen:

Ist (Γ, G) und (Γ´, G´) Є K, so sind (Γ, G) und (Γ´, G´) äquivalent.

(d.h. es gibt eine ℝ-lineare Abbildung

$$\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad mit \quad \Phi(\Gamma) = \Phi\,' \text{ etc.)}$$