Existenz der 17 Flächengruppen

Referentin:	Anna Linscheidt
Seminar:	Pro-/Seminar zur Arithmetik
Dozent:	Prof. Dr. Skoruppa
Semester:	SoSe 2015
Datum:	25.06.15

Inhalt

- Wiederholung
- Definitionen
- Hauptklassen
- Ausnahmeklassen
- Affine Äquivalenz
- Zusammenfassung

Wiederholung

Affin äquivalent

- *Zwei Flächengruppen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ heißen affin äquivalent, wenn es eine affine Abbildung* $F : E \rightarrow E$ *mit* $\mathcal{G}' = F\,\mathcal{G}F^{-1}$

Satz

Wenn zwei Flächengruppen affin äquivalent sind, gehören ihre Symmetriepaare zur selben linearen Äquivalenzklasse.

Wiederholung

Satz

Genau dann, wenn die Spiegelung $\sigma \in \mathcal{G}$ rhombisch ist, enthält die zugehörige Parallelschar sowohl Spiegel- als auch Gleitspiegelachsen.

Bei der orthogonalen Spiegelung $\sigma \in \mathcal{G}$ besteht die Parallelschar entweder nur aus Spiegelachsen oder aber nur aus Gleitspiegelachsen.

Ziel dieses Vortrags

Satz

Jede Flächengruppe gehört zu genau einer der folgenden 17 Klassen

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\check{C}_1 & \check{C}_2 & \check{C}_3 & \check{C}_4 & \check{C}_6 & \breve{D}_{10} & \breve{D}_{1r} & \breve{D}_{2o} & \breve{D}_{2r} & \breve{D}_{3o} & \breve{D}_{3r} & \breve{D}_4 & \breve{D}_6 \\
 & & & & & \breve{D}'_{1o} & & \breve{D}'_{2o} & & & & & \\
 & & & & & & & \breve{D}''_{2o} & & & & \breve{D}''_4 &
\end{array}
$$

<u>*Erinnerung:*</u>

Zwei Flächengruppen gehören zu der selben Klasse, falls sie affin äquivalent sind.

Hauptklassen und strikte Gleitspiegelungen

Hauptklassen *werden solche Klassen genannt, deren Flächengruppen <u>keine strikten Gleitspiegelungen</u> enthalten*

Strikte Gleitspiegelungen $\mathcal{G}$ $(\mapsto (\mathcal{G}_*,\Gamma))$ *sind Gleitspiegelungen mit Gleitvektor* ω, *der nicht zu* Γ *gehört.*

Ausnahmeklassen

Ihre Flächengruppen enthalten mindestens eine strikte Gleitspiegelung

 # der Striche = # der orthogonalen Spiegelungen in den Flächengruppen der gegebenen Ausnahmeklasse, die durch strikte Gleitspiegelungen in $\mathcal{G}$ realisiert werden

Symmetriepaar

Ein Gitter Γ zusammen mit einer Untergruppe $G < \Sigma(\Gamma)$

(d.h. ein G, sodass $g(\Gamma)=\Gamma$ für alle $g \in G$ gilt)

nennt man ein Symmetriepaar (Γ,G).

Flächengruppe

Eine Untergruppe von I heißt Flächengruppe, wenn ihre Translationsvektoren ein Gitter in $\mathbb{C}$ bilden

Hauptklassen

Satz

Jedes Symmetriepaar (Γ,G) wird durch eine Flächengruppe $\mathcal{G}$ realisiert, die keine strikten Gleitspiegelungen enthält.

<u>Folgerung:</u>

Jedes Symmetriepaar wird durch eine Hauptklasse realisiert.

Hauptklassen

Beweisidee

Gegeben sei ein Symmetriepaar (Γ, G).

Fixiere $P \in E$. Realisiere $g \in G$ durch die Isometrie:

$\hat{g}: P+z \mapsto P+g(z)$

Setze

$\mathcal{G}$:= *die von allen* $\hat{g}$ $(g \in G)$ *und allen* t_ω $(\omega \in \Gamma)$ *erzeugt Untergruppe in* I

Hauptklassen

z.z.

1. $\{\omega \in \mathbb{C} \mid t_\omega \in \mathcal{G}\} = \Gamma$
2. $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ *ist Flächengruppe*
3. $\mathcal{G}_* = \mathcal{G}$

Hauptklassen

Beweis

Sei $P \in E$ ein Basispunkt

Es gibt genau eine Untergruppe $\mathcal{G}_p < I$ mit $(\mathcal{G}_p)_* = G$, bei der die Elemente von $\mathcal{G}_p$ den gemeinsamen Fixpunkt P haben

Sei $\mathcal{G} < I$ die von $\mathcal{G}_p$ und allen Translationen t_ω mit $\omega \in \Gamma$ erzeugte Untergruppe

Hauptklassen

Für die Untergruppe gilt:

$\mathcal{G}_* = G$ *und aus* $t_z \in \mathcal{G}$ *folgt* $z \in \Gamma \quad (*)$

Denn für jedes erzeugende Element g von $\mathcal{G}$ *und damit für alle Elemente* $g \in \mathcal{G}$ *gilt*

$$g_* \in G \qquad\qquad \text{und}$$

$$g(P+\Gamma) \subset P+\Gamma := \{P+\omega : \omega \in \Gamma\}$$

Hauptklassen

Aus $t_z \in \mathcal{G}$ *folgt*

$t_z(P) = P + z \in P + \Gamma$, *also* $z \in \Gamma$

Wegen (*) ($\mathcal{G}_* = G$ *und aus* $t_z \in \mathcal{G}$ *folgt* $z \in \Gamma$)
ist $\mathcal{G}$ *eine Flächengruppe mit dem Symmetriepaar* (Γ, G)
Bei der jede Spiegelung in G durch eine Spiegelung in $\mathcal{G}_p < \mathcal{G}$ *realisiert wird.*

- *Daher gehört* $\mathcal{G}$ *zur entsprechenden Hauptklasse.*

Ausnahmeklassen

Wir gehen von einem Symmetriepaar $(\Gamma, G) \in D_{1o}$, D_{2o} bzw. D_4 aus. Diese Symmetriepaare können auch durch andere Konstruktionen, als die oben diskutierten realisiert werden:

Ausnahmeklassen

<u>Erinnerung</u>:

D_{1o} und D_{2o} bestehen aus einem Symmetriepaar (Γ,G) mit den folgenden Eigenschaften:

$\Gamma = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ *und* $G = \langle\sigma\rangle$ *bzw.* $= \langle\pm\sigma\rangle$

mit $\sigma(a) = a$, $\sigma(b) = -b$

D_4 besteht aus einem Symmetriepaar (Γ,G) mit den folgenden Eigenschaften

$\Gamma = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}ia$ *und* $G = \langle\sigma, \sigma r\rangle$

mit $\sigma(a) = a, \sigma(ia) = -ia$

und $\sigma_r\,(a) = ia$, $\sigma_r\,(ia) = a$.

Ausnahmeklassen

Sei $P \in E$ wie zuvor fest gewählt.

- *σ realisieren wir durch:*

g: Gleitspiegelung an der Achse $P+\mathbb{R}a$ mit dem Verschiebevektor $\frac{1}{2}$ a

- *-σ realisieren wir durch:*

$\tilde{g}$: Gleitspiegelung an der Achse $P+\mathbb{R}b$ mit dem Verschiebevektor $\frac{1}{2}$ b
oder
s: Spiegelung an der durch Γ festgelegte Achse durch P

- *σ_r realisieren wir durch:*

s_r: Spiegelung an der durch σ_r festgelegten Achse durch P

Ausnahmeklassen

Damit definieren wir folgende Untergruppen von I

- *Zu $(\Gamma,G) \in D_{1o}$ definiere*
$$\mathcal{G}'_{1o} := \langle g, t_\omega(\omega \in \Gamma)\rangle$$

- *Zu $(\Gamma,G) \in D_{2o}$ definiere*
$$\mathcal{G}'_{2o} := \langle g, s, t_\omega(\omega \in \Gamma)\rangle$$
$$\mathcal{G}''_{2o} := \langle g, \tilde{g}, t_\omega(\omega \in \Gamma)\rangle$$

- *Zu $(\Gamma,G) \in D_4$ definiere*
$$\mathcal{G}''_4 := \langle g, s_r, t_\omega(\omega \in \Gamma)\rangle$$

Ausnahmeklassen

Satz

Die Flächengruppen $\mathcal{G}'_{1o}$, $\mathcal{G}'_{2o}$, $\mathcal{G}''_{2o}$, $\mathcal{G}''_{4}$ realisieren jeweils das System fixierter Symmetriepaare (Γ,G) aus $\underline{D}_{1o}$, $\underline{D}_{2o}$, $\underline{D}_{4}$.

Genauer, die Flächengruppen gehören jeweils zu den Ausnahmeklassen D'_{1o}, D'_{2o}, D''_{2o}, D''_{4}.

Ausnahmeklassen

Beweisidee

Zu beweisen:

1. $\mathcal{G}_* = G$
2. aus $t_z \in \mathcal{G}$ folgt $z \in \Gamma$

- *Dann ist (Γ, G) das Symmetriepaar zu $\mathcal{G}$*
  - g *und* $\tilde{g}$ *sind strikte Gleitspiegelungen*

  - *Daraus folgt, dass $\mathcal{G}$ zur angegebenen Klasse gehört*

Affine Äquivalenz

Satz

Die Klassifikation der Flächengruppen nach ihrer affinen Äquivalenz besteht aus

den 13 Hauptklassen $\check{C}_1, \ldots, \breve{D}_6$ *und den 4 Ausnahmeklassen* $\overparen{D'}_{10}, \ldots, \overparen{D''}_4$ *die wir zuvor definiert haben.*

Affine Äquivalenz

Was ist hier noch zu zeigen?

z.B.

Die Konstruktion der durch ein Paar (Γ,G) realisierten Flächengruppe hängt von der Wahl des Basispunktes $P \in E$ ab.

z.z. Wähle nun einen wahren Basispunkt, so sind die „alten“ und die „neuen“ affin äquivalent.

Zusammenfassung

- *Zu jedem gegebenen Symmetriepaar (Γ, G) gibt es eine Flächengruppe $\mathcal{G}$, die (Γ, G) realisiert, d.h. $\{\omega \in \mathbb{C} \mid t_\omega \in \mathcal{G}\} = \Gamma, \mathcal{G}_* = \mathcal{G}$*

- *Es gibt 17 Klassen von Flächengruppen*

- *Jedes Symmetriepaar kann durch eine Flächengruppe aus einer Hauptklasse realisiert werden, d.h. ohne strikte Gleitspiegelungen*

- *Drei Klassen von Symmetriepaaren ($\underline{D}_{1o}$, $\underline{D}_{2o}$, $\underline{D}_4$) können durch Flächengruppen mit strikten Gleitspiegelungen realisiert werden.*