

# **Klassifikation der Flächengruppen**

§5.1 - §5.4 K. Lamotke

Die Symmetriegruppen der ebenen Ornamente

Proseminar zur Arithmetik

Viktor Harder

11. Juni 15

# Agenda 11.06.15

- I. Wiederholung und Definitionen
- II. Die Symmetriepaare der Flächengruppen
- III. Gleitspiegelungen
- IV. Klassifikation der Flächengruppen
- V. Flächenornamente

# I. Wiederholung und Definitionen

## Ziel:

Aufteilung der Flächengruppen in 17 Klassen gemäß der affinen Äquivalenz.

## Erinnerung:

Für jede reelle Basis  $a, b$  von  $\mathbb{C}$  nennt man die additive Untergruppe

$\Gamma = \mathbb{Z} \cdot a + \mathbb{Z} \cdot b = \{m \cdot a + n \cdot b : m, n \in \mathbb{Z}\} < \mathbb{C}$  ein Gitter. Eine

Untergruppe von  $I$  heißt Flächengruppe, wenn ihre Translationsvektoren ein Gitter bilden.

# I. Wiederholung und Definitionen

## Definition: (Affine Abbildungen)

Eine Abbildung  $F: E \rightarrow E$  heißt affin, wenn es eine bijektive, reell lineare Abbildung  $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und zwei Punkte  $P, P' \in E$  gibt, so dass  $F(P + z) = P' + \Phi(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt.

## Bemerkung / Notation:

Die lineare Abbildung  $\Phi$  ist durch  $F$  eindeutig bestimmt und wird mit  $F_* := \Phi$  bezeichnet.

## Definition: (Affine Äquivalenz)

Zwei Flächengruppen  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}'$  heißen affin äquivalent, wenn es eine affine Abbildung  $F: E \rightarrow E$  mit  $\mathcal{G}' = F\mathcal{G}F^{-1}$  gibt.

# II. Die Symmetriepaare der Flächengruppen

Bei jeder Flächengruppe  $\mathcal{G} < I$  bilden alle Translationsvektoren ein Gitter  $\Gamma$ , so dass die orthogonale Gruppe  $G := \mathcal{G}_* < \Sigma(\Gamma)$  eine Untergruppe der Symmetriegruppe von  $\Gamma$  ist. Daher gehört zu  $\mathcal{G}$  das Symmetriepaar  $(\Gamma, G)$ .

## Satz:

Wenn zwei Flächengruppen affin äquivalent sind, gehören ihre Symmetriepaare zur selben linearen Äquivalenzklasse. |

## Beweisidee:

Seien  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}'$  zwei affin äquivalente Flächengruppen und  $F$  eine affine Abbildung, sodass  $\mathcal{G}' = F\mathcal{G}F^{-1}$  gilt. Weiterhin sei  $\Gamma'$  Gitter in  $\mathcal{G}'$  und  $G' = (\mathcal{G}')_*$ . Es genügt zu zeigen, dass  $\Gamma' = F_*(\Gamma)$  und  $G' = F_*GF_*^{-1}$ . Dies kann man leicht anhand der Definitionen nachrechnen.

# II. Die Symmetriepaare der Flächengruppen

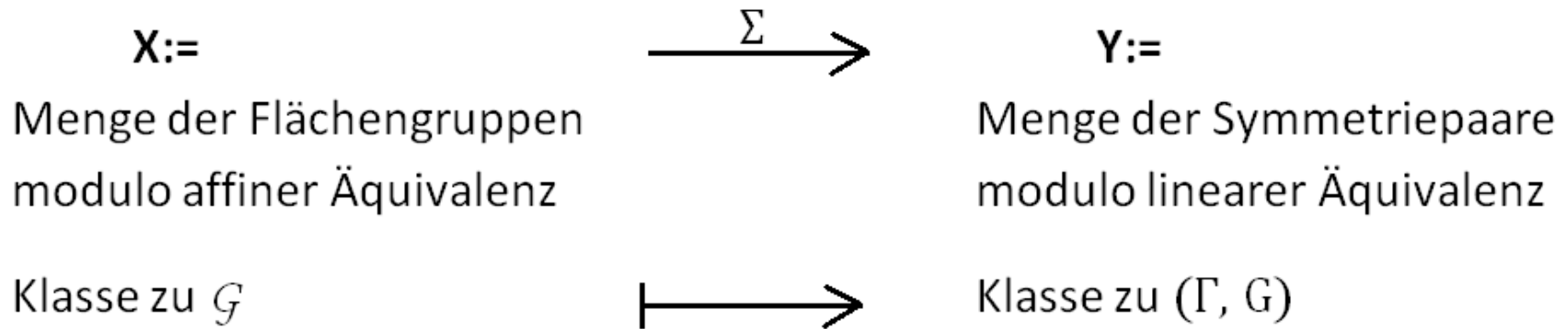
Wir betrachten folgende Abbildung:

Menge der Flächengruppen  $\mathcal{G}$   $\longrightarrow$  Menge der Symmetriepaare  $(\Gamma, G = \mathcal{G}_*)$   
 $\longmapsto$

( $\Gamma$  das Gitter in  $\mathbb{C}$  ist, sodass  $\{t_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$  die Untergruppe der Translation zu  $\mathcal{G}$  ist)

Nach dem vorherigen Satz „induziert“ diese Abbildung eine Abbildung  $\Sigma$ :

# II. Die Symmetriepaare der Flächengruppen



Wir wissen, dass  $\#Y=13$ . Zu jedem Symmetriepaar in  $Y$  bestimmen wir alle Urbilder in  $X$ .

**Problem:** Welche  $\mathcal{G}$  passen zu gegebenen  $(\Gamma, G)$ ?

Es ist zu untersuchen, wie Spiegelungen in  $G$  durch Gleitspiegelungen in  $\mathcal{G}$  realisiert werden können!

# III. Gleitspiegelungen

## Lemma 1:

Bei jeder Gleitspiegelung  $g \in \mathcal{G}$  mit dem Gleitvektor  $\omega$  gehört  $2\omega$  zu  $\Gamma$ .

## Sprechweise:

Wir nennen  $g$  eine strikte Gleitspiegelung, wenn  $\omega \notin \Gamma$ .

## Lemma 2:

Jede Achse einer nicht-strikten Gleitspiegelung ist die Achse einer Spiegelung.  
(Diese Achsen werden Spiegelachsen von  $\mathcal{G}$  genannt)

## Sprechweise:

Die Gleitspiegelachsen von  $\mathcal{G}$  sind die Achsen der strikten Gleitspiegelungen.



# III. Gleitspiegelungen

## Bemerkungen:

Keine Gerade ist gleichzeitig Spiegel- und Gleitspiegelachse von  $\mathcal{G}$ . Zwei (Gleit-) Spiegelungen  $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$  haben offenbar genau dann zueinander parallele Achsen, wenn  $g_{1*} = g_{2*}$  ist. Die Spiegelungen  $\sigma \in G$  treten daher als Parallelscharen von (Gleit-) Spiegelachsen der Gruppe  $\mathcal{G}$  in Erscheinung.

## Satz:

Genau dann, wenn die Spiegelung  $\sigma \in G$  rhombisch ist, enthält die zugehörige Parallelschar Spiegel- und Gleitspiegelachsen.

Bei einer orthogonalen Spiegelung  $\sigma \in G$  besteht die Parallelschar nur aus Spiegelachsen oder nur aus Gleitspiegelachsen.

# III. Gleitspiegelungen

Beweis:

Für zwei (Gleit-) Spiegelungen  $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$  gilt  $g_1^* = g_2^* = \sigma$  genau dann, wenn  $t_\omega := g_1 \circ g_2^{-1}$  eine Translation mit  $\omega \in \Gamma$  ist. Die Differenz der Gleitvektoren  $g_1$  und  $g_2$  ist  $\frac{1}{2}(\omega + \sigma(\omega))$ .

1. Fall ( $\sigma$  orthogonal):

Es gibt eine Basis  $\underline{a}, \underline{b}$  von  $\Gamma$  mit  $\sigma(\underline{a}) = \underline{a}, \sigma(\underline{b}) = -\underline{b}$ . Die Gleitvektoren von  $g_1, g_2$  liegen in  $\mathbb{Z} \cdot \frac{1}{2} \underline{a}$ .

Für  $\omega = m\underline{a} + n\underline{b}$  ist  $\frac{1}{2}(\omega + \sigma(\omega)) = m\underline{a} \in \mathbb{Z} \cdot \underline{a}$ . Die Gleitvektoren von  $g_1$  und  $g_2$  liegen daher beide in  $\mathbb{Z} \cdot \underline{a}$  oder beide in  $(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}) \cdot \underline{a}$ . Im ersten Fall gibt es nur Spiegelachsen und im zweiten Fall nur Gleitspiegelachsen in der Parallelschar zu  $\sigma$ .

2. Fall ( $\sigma$  rhombisch):

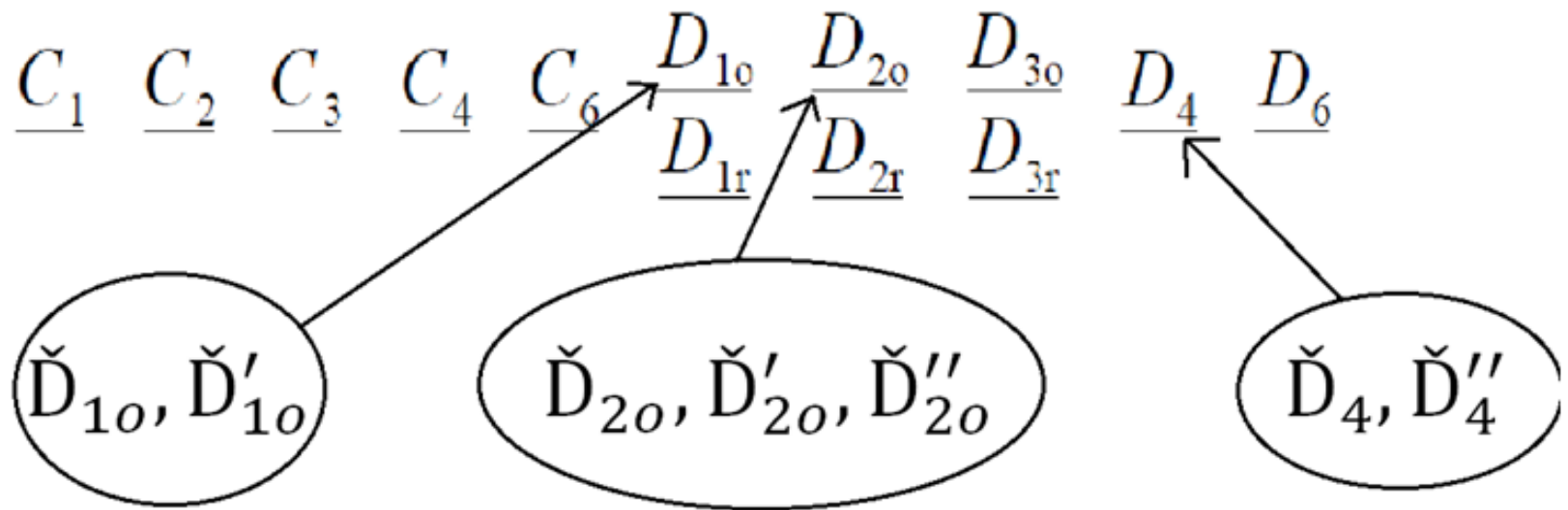
$\Gamma$  hat eine Basis der Gestalt  $\underline{a}, \sigma(\underline{a})$ . Die Gleitvektoren von  $g_1, g_2$  liegen in  $\mathbb{Z} \cdot \frac{1}{2}(\underline{a} + \sigma(\underline{a}))$ . Für

$\omega = m\underline{a} + n\sigma(\underline{a})$  gilt  $\frac{1}{2}(\omega + \sigma(\omega)) = \frac{1}{2}(m+n)(\underline{a} + \sigma(\underline{a}))$ . Das heißt alle Vektoren in  $\mathbb{Z} \cdot$

$\frac{1}{2}(\underline{a} + \sigma(\underline{a}))$  kommen als Differenzen von Gleitvektoren vor. Die Parallelschar zu  $\underline{a}$  enthält daher Spiegel und Gleitspiegelachsen.

# IV. Klassifikation der Flächengruppen

Klassen der Symmetriepaare:



Klassen von Flächengruppen:

Die anderen Symmetriepaare haben jeweils nur ein Urbild

( $\check{C}_1, \check{C}_2, \check{C}_3, \check{C}_4, \check{C}_6, \check{D}_{30}, \check{D}_{1r}, \check{D}_{2r}, \check{D}_{3r}, \check{D}_6$ )

# IV. Klassifikation der Flächengruppen

**Satz:**

Jede Flächengruppe gehört zu genau einer der folgenden 17 Klassen

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 \check{C}_1 & \check{C}_2 & \check{C}_3 & \check{C}_4 & \check{C}_6 & \check{D}_{1o} & \check{D}_{1r} & \check{D}_{2o} & \check{D}_{2r} & \check{D}_{3o} & \check{D}_{3r} & \check{D}_4 & \check{D}_6 \\
 & & & & & \check{D}'_{1o} & & \check{D}'_{2o} & & & & & \\
 & & & & & & & \check{D}''_{2o} & & & & & \check{D}''_4
 \end{array}$$

Wenn zwei Flächengruppen affin äquivalent sind, gehören sie zur selben Klasse.

**Beweis:**

Zu affin äquivalenten Gruppen  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}' = F\mathcal{G}F^{-1}$  gehört dieselbe Anzahl indizierender Striche. Ergibt sich aus der Tatsache, dass jeder Gleitspiegelung  $g \in \mathcal{G}$  mit dem Gleitvektor  $\omega$  die Gleitspiegelung  $FgF^{-1}$  mit dem Gleitvektor  $F_*(\omega)$  entspricht.  $\square$

# IV. Klassifikation der Flächengruppen

Unterscheidung in

13 Hauptklassen ( $\check{C}_1$  bis  $\check{D}_6$ ) und 4 Ausnahmeklassen ( $\check{D}'_{10}$ ,  $\check{D}'_{20}$ ,  $\check{D}''_{20}$ ,  $\check{D}''_4$ )

$\check{C}_1$   $\check{C}_2$   $\check{C}_3$   $\check{C}_4$   $\check{C}_6$   $\check{D}_{10}$   $\check{D}_{1r}$   $\check{D}_{20}$   $\check{D}_{2r}$   $\check{D}_{30}$   $\check{D}_{3r}$   $\check{D}_4$   $\check{D}_6$   
 $\check{D}'_{10}$   $\check{D}'_{20}$   
 $\check{D}''_{20}$   $\check{D}''_4$

# IV. Klassifikation der Flächengruppen

Die in der Kristallographie üblichen Symbole für die 17 Klassen benutzen folgende Abkürzungen:

- $p \triangleq$  primitive Zelle
- $c \triangleq$  centrierte Zelle
- $m \triangleq$  Spiegelung
- $g \triangleq$  Gleitspiegelung

Die Symbole sind:

<i>Klasse</i>	$\check{C}_1$	$\check{C}_2$	$\check{C}_3$	$\check{C}_4$	$\check{C}_6$	$\check{D}_{1o}$	$\check{D}'_{1o}$	$\check{D}_{2o}$	$\check{D}'_{2o}$	$\check{D}''_{2o}$
<i>Symbol</i>	$p1$	$p2$	$p3$	$p4$	$p6$	$pm$	$pg$	$pmm$	$pmg$	$pgg$

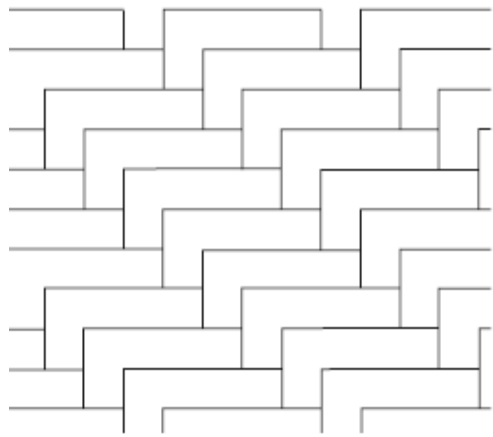
<i>Klasse</i>	$\check{D}_{1r}$	$\check{D}_{2r}$	$\check{D}_{3o}$	$\check{D}_{3r}$	$\check{D}_4$	$\check{D}''_4$	$\check{D}_6$
<i>Symbol</i>	$cm$	$cmm$	$p31m$	$p3m1$	$p4m$	$p4g$	$p6m$

# V. Flächenornamente

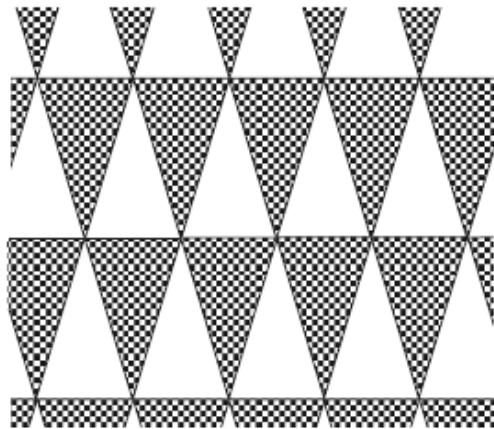
Die Symmetriegruppen der folgenden 17 Flächenornamente repräsentieren die 17 verschiedenen Klassen der Flächengruppen.

Wir sehen also, dass keine der 17 Klassen leer ist. (Formaler Beweis  $\square$  nächste Sitzung)

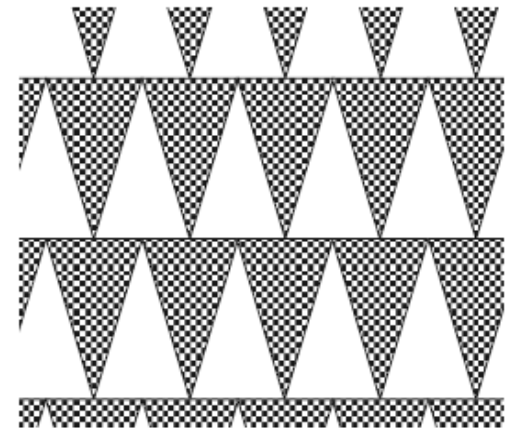
# V. Flächenornamente



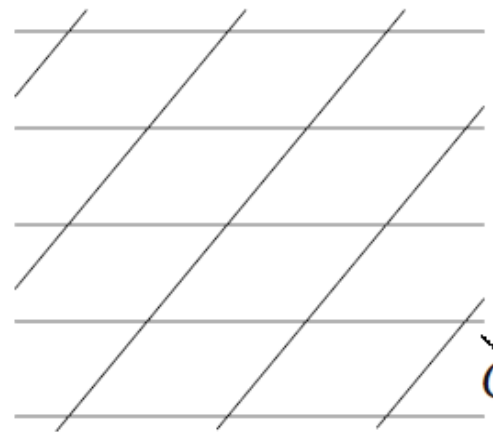
$\check{C}_1$



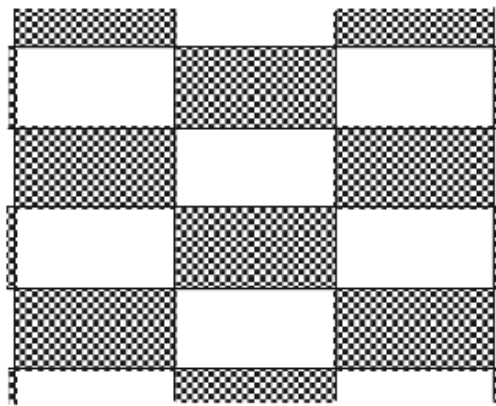
$\check{D}_{1r}$



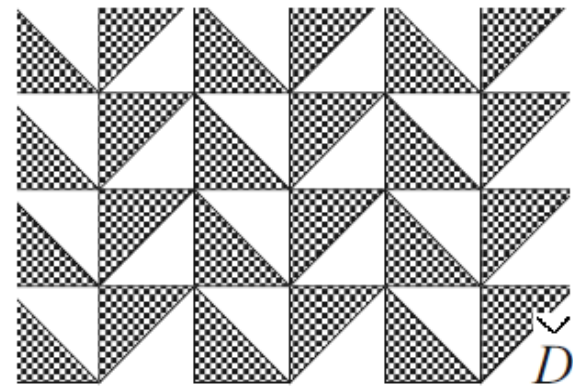
$\check{D}_{1o}$



$\check{C}_2$



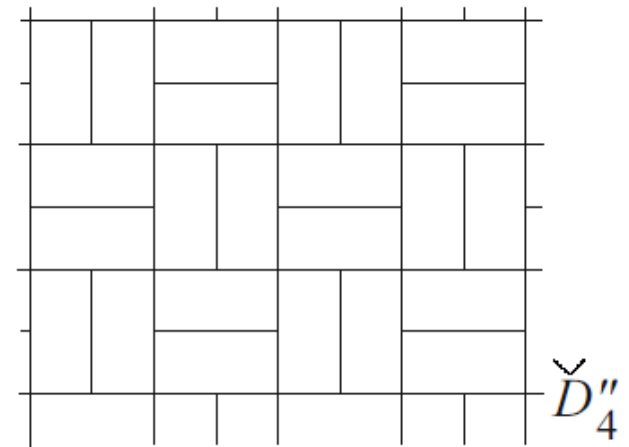
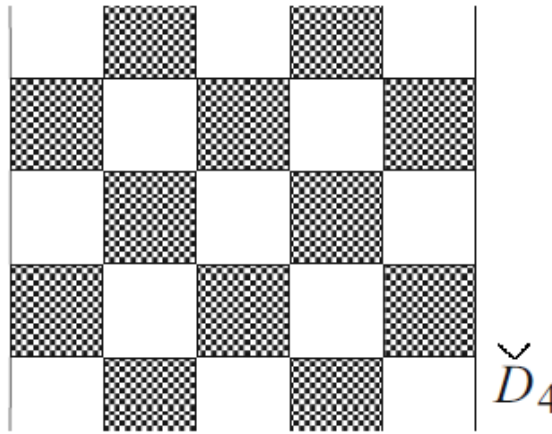
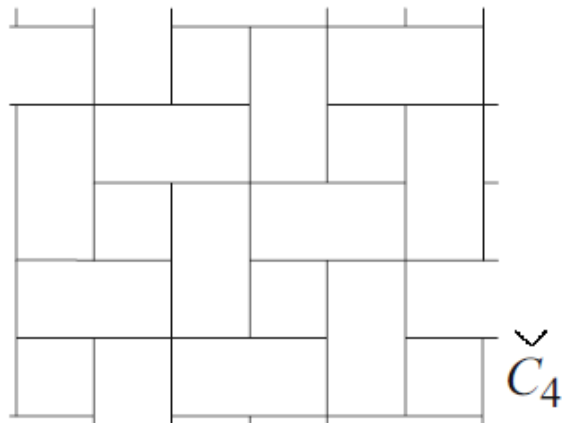
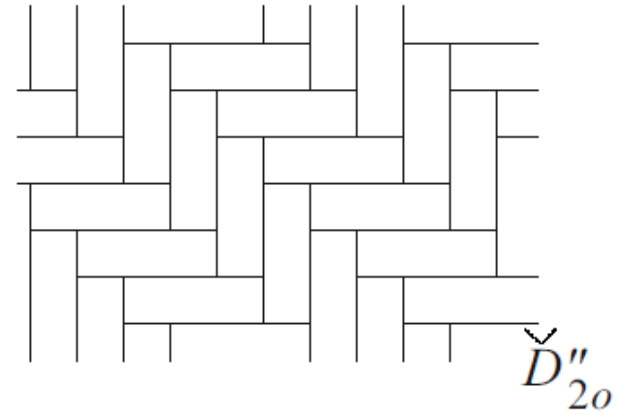
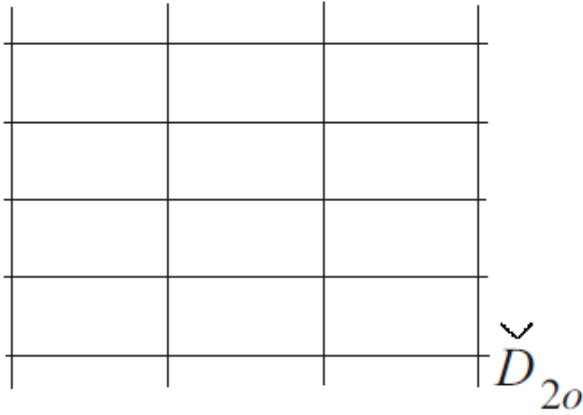
$\check{D}_{2r}$



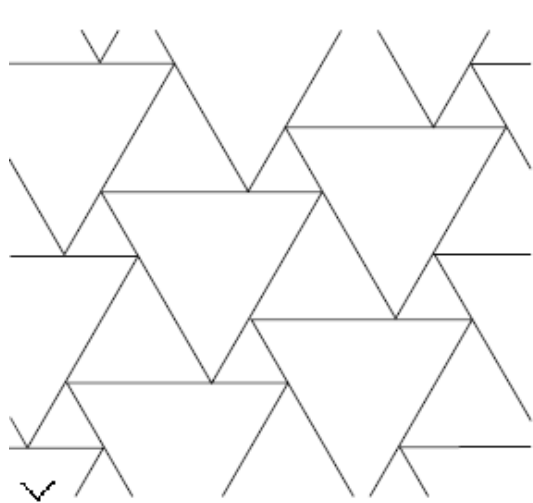
$\check{D}'_{1o}$



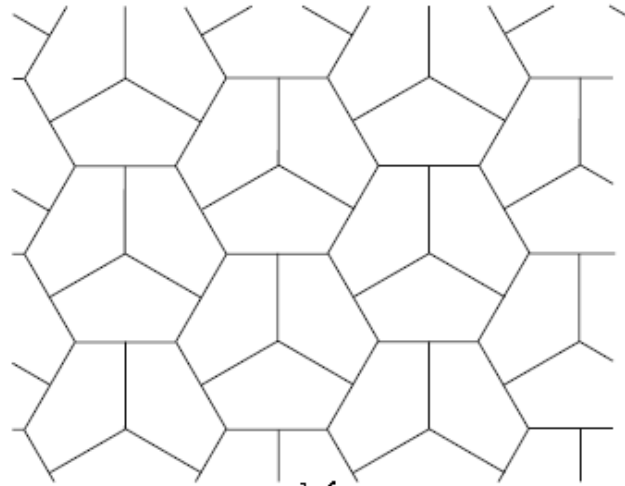
# V. Flächenornamente



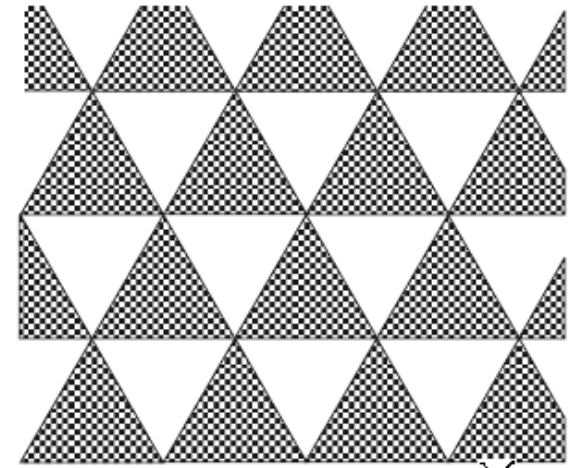
# V. Flächenornamente



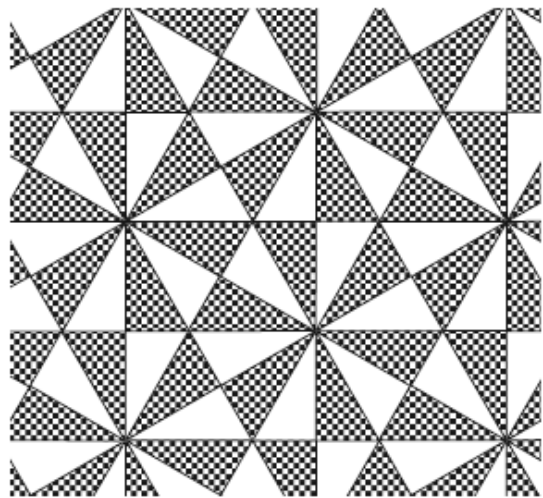
$\checkmark C_3$



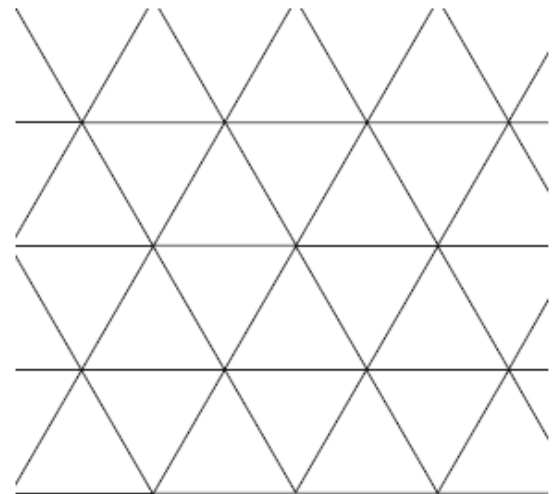
$\checkmark D_{30}$



$D_{3r}$



$\checkmark C_6$



$\checkmark D_6$