Punktgruppen und Bandgruppen

Pro-/Seminar zur Arithmetik

Julia Gerbe

07.05.2015

Inhaltsverzeichnis

1. Zur Wiederholung

1.1 Translation

1.2 Isometrien

1.3 Zyklische Gruppe

1.4 Diedergruppe

2. Punktgruppen

2.1 Eindeutige Charakterisierung

3. Bandgruppen

3.1 Eindeutige Charakterisierung

3.2 Die 4 Elemente der orthogonalen Gruppe

3.3 Erzeugung von 7 Bandgruppen

3.3.1 Vollständigkeit der Liste

3.4 Bandornamente

4. Überblick: Was haben wir heute gelernt?

1. Zur Wiederholung

1.1 Translation

$$Wenn\ man\ vom\ Punkte\ P \in E\ den\ Vektor\ z \in \mathbb{C}\ abträgt, erhält\ man\ den\ Punkt$$
$$Q = P + z \in E$$

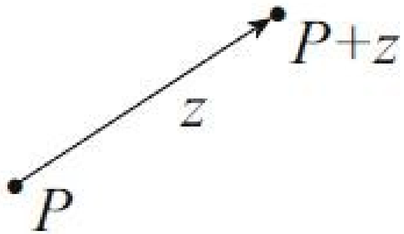


Fig. 2.1 Translation des Punktes $P \in E$ in den Punkt $t_z(P) := P + z$

1. Zur Wiederholung

1.2 Isometrien

Die Isometrie $f(P+z) = P + e^{i\alpha} z \ (P, \alpha \ fest, z \in \mathbb{C})$ *wird* $\boldsymbol{\alpha}$ **− *Drehung*** *um P genannt.*

Die Isometrie $s: E \to E, s(P+z) := P + \sigma(z)$

*heißt **Spiegelung** an der Geraden* $P + L := \{P + z : z \in L\}$

*Diese Gerade ist Fixpunktmenge von s und wird **Spiegelachse** genannt.*

*Die Isometrien Drehung und Spiegelung bezeichnet man auch als **Symmetrietransformationen**.*

1. Zur Wiederholung
1.2 Isometrien

$Für\ jeden\ Vektor\ w \in L, w \neq 0, nennt\ man\ \ g := s \circ t_w = t_w \circ s$

$eine$ ***Gleitspiegelung*** $an\ der\ Achse\ \ P + L\ mit\ dem\ Gleitvektor\ w.$

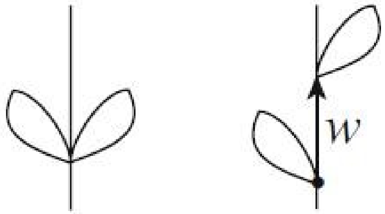


Fig. 2.4 Ein Blatt mit seinem Spiegelbild links und mit seinem Gleitspiegelbild rechts. Der Gleitvektor ist w

! *Alle Isometrien bilden mit der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung eine Gruppe I*

1. Zur Wiederholung
1.3 Zyklische Gruppe

*Eine **zyklische Gruppe** ist eine Gruppe,*
die nur von einem einzigen Element a erzeugt wird.
Sie besteht nur aus der Potenz des Erzeugers a: $\langle a \rangle := \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$

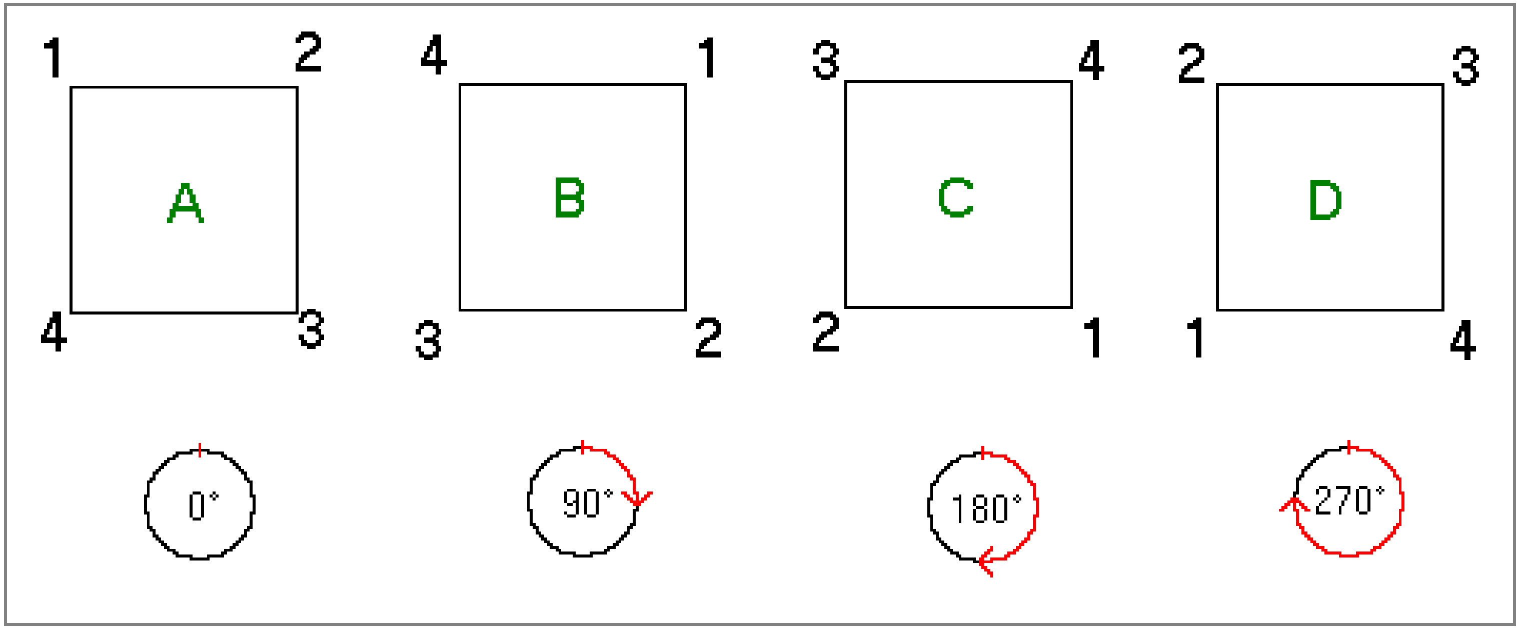
Für jede natürliche Zahl n gibt es eine zyklische Gruppe C_n
mit genau n Elementen.

Und es gibt die unendlich zyklische Gruppe,
die additive Gruppe der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

1. Zur Wiederholung
1.3 Zyklische Gruppe

Die endlich zyklischen Gruppen veranschaulicht als Drehgruppe regulärer Vierecke in der Ebene

C_4



Elemente der zyklischen Gruppe: Bewegungen, nicht Stellung des Quadrats.

1. Zur Wiederholung

1.3 Zyklische Gruppe

$$C_4 := \{\underbrace{r_0, r_1, r_2, r_3}_{n=4}\}$$

r_0 = Drehung um 0°
r_1 = Drehung um 90°
r_2 = Drehung um 180°
r_3 = Drehung um 270°

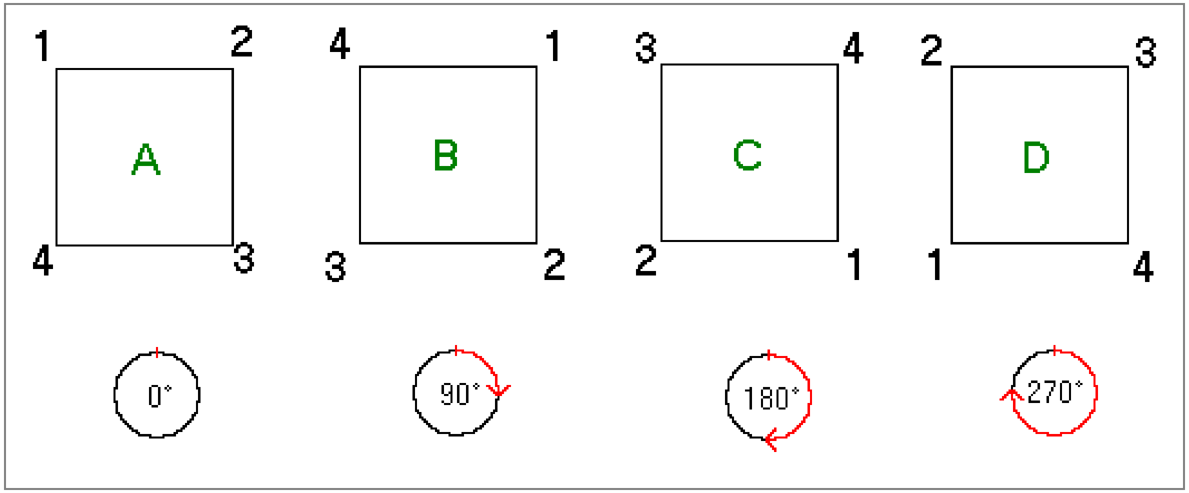
Permutations-Darstellung:

$$r(r_0) = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix}$$

$$r(r_1) = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2341 \end{pmatrix}$$

$$r(r_2) = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix}$$

$$r(r_3) = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4123 \end{pmatrix}$$



1. Zur Wiederholung

1.3 Diedergruppe

$Die\ Diedergruppe\ ist\ die\ Isometriegruppe\ eines\ regelmäßigen\ n-Ecks\ in\ der\ Ebene.$

$Der\ Name\ ist\ abgeleitet\ von\ Di-eder$

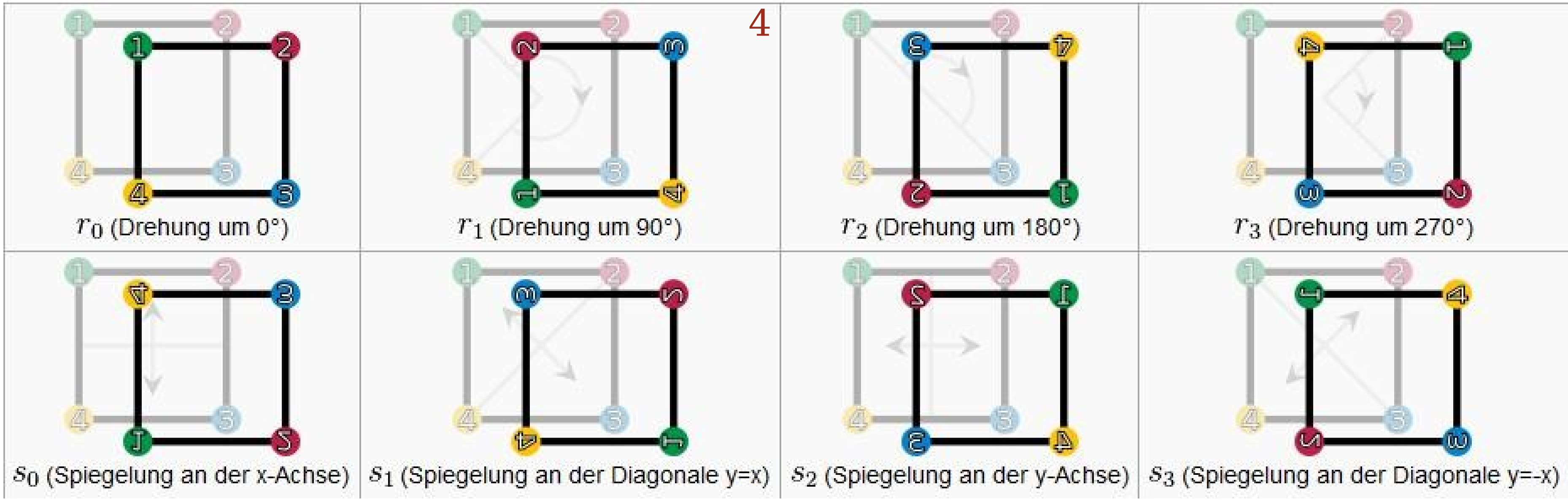
$=(griechisch)\ Zweiflächner$

$Die\ Diedergruppe\ D_n\ enthält\ 2n\ Elemente,$

$nämlich\ n\ Drehungen\ und\ n\ Spiegelungen.$

1. Zur Wiederholung

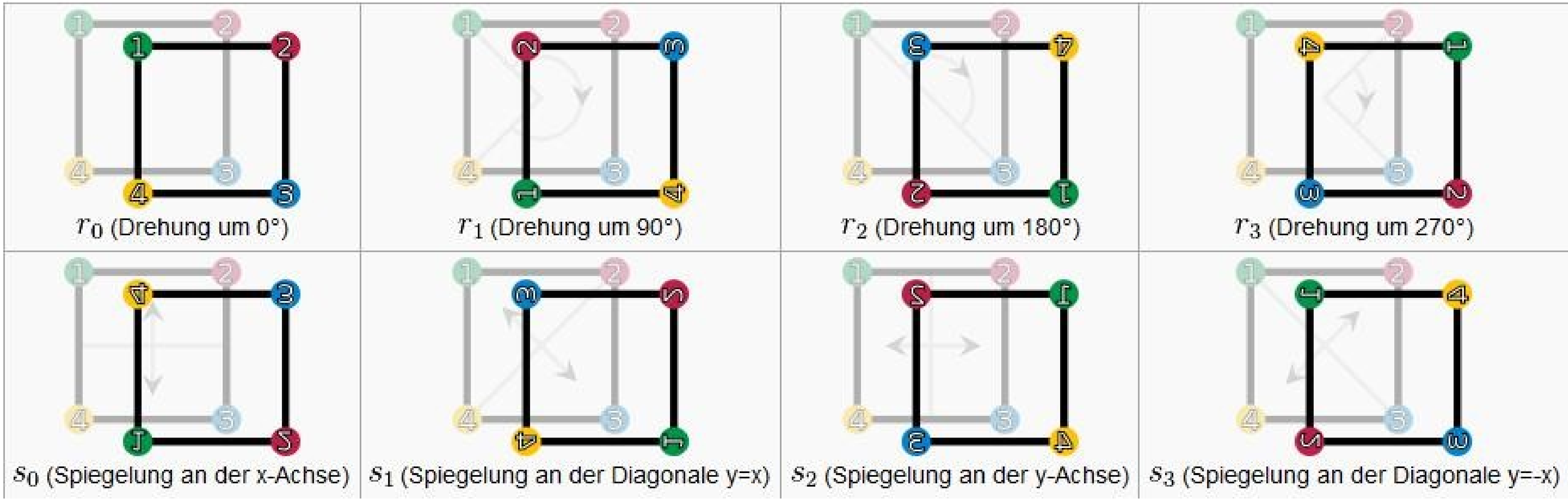
1.3 Diedergruppe D_4



r_0 = Drehung um 0°
r_1 = Drehung um 90°
r_2 = Drehung um 180°
r_3 = Drehung um 270
s_0 = Spiegelung x-Achse
s_1 = Spiegelung Diagonale $y=x$
s_2 = Spiegelung y-Achse
s_3 = Spiegelung Diagonale

$$D_4 := \underbrace{\{r_0, r_1, r_2, r_3, s_0, s_1, s_2, s_3\}}_{2 \times 4 = 8\ Elemente}$$

$n = 4$



Permutations-Darstellung

Drehungen:

$$r(r_0) = \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix} \quad r(r_2) = \begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix}$$

$$r(r_1) = \begin{pmatrix}1234\\2341\end{pmatrix} \quad r(r_3) = \begin{pmatrix}1234\\4123\end{pmatrix}$$

Spiegelungen:

$$r(s_0) = \begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix} \quad r(s_2) = \begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix}$$

$$r(s_1) = \begin{pmatrix}1234\\3214\end{pmatrix} \quad r(s_3) = \begin{pmatrix}1234\\1432\end{pmatrix}$$

2. Punktgruppen
2.1 Eindeutige Charakterisierung

Endliche Untergruppen von I enthalten ***keine*** *Translationen* $\neq id$.

Sie heißen ***Punktgruppen****,*

da alle Elemente einen gemeinsamen Fixpunkt haben.

Das heißt:

Punktgruppen enthalten Drehungen oder Spiegelungen

aber ***keine*** *Gleitspiegelungen*!

2. Punktgruppen
2.1 Eindeutige Charakterisierung

Satz: *Sei G eine Punktgruppe.*

1 *Alle Elemente von G haben einen gemeinsamen Fixpunkt P.*

2 *Die orthogonale Gruppe G_* ist eine zyklische Gruppe C_n oder eine Diedergruppe D_n.*

2. Punktgruppen
2.1 Eindeutige Charakterisierung

Beweis:

Zu 1

Es gibt keine Gleitspiegelung g, da g^2 *eine Translation wäre. Es gibt auch keine Spiegelungen an parallelen Geraden, da ihr Produkt eine Translation in einer zu diesen Geraden senkrechten Richtung wäre.*

Alle Drehungen in einer Punktgruppe haben wegen 2.5(4) denselben Fixpunkt.

(4) *Wenn zwei Drehungen* r_A *und* r_B *verschiedene Fixpunkte* $A \neq B$ *haben, ist* $r_A r_B r_A{}^{-1} r_B{}^{-1}$ *eine Translation* $\neq \mathrm{id}$.

2. Punktgruppen
2.1 Eindeutige Charakterisierung

Wenn es außerdem Spiegelungen gibt, laufen deren Achsen wegen 2.5(1) durch diesen Punkt.

(1) *Wenn sich zwei Spiegelachsen a und b im Punkte P unter dem Winkel α schneiden, ist das Produkt der entsprechenden Spiegelungen $r := s_a \circ s_b$ die 2α-Drehung um P, siehe die linke Figur 2.5.* $\square$

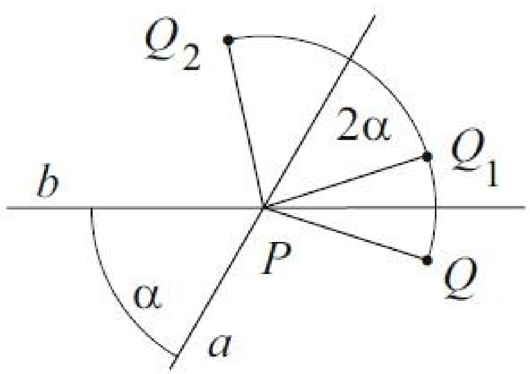


Fig. 2.5 Links: Die Hintereinanderschaltung der Spiegelungen s_a, s_b an den Geraden a, b ist die 2α-Drehung r um P, also $r(Q) = Q_2 = s_a(Q_1) = s_a s_b(Q)$

$\Rightarrow$ *Alle* $f \in G$ *haben also einen gemeinsamen Fixpunkt* P.

Zu 2 *Der Epimorphismus* $G \to G_*$ *ist bijektiv.*
Wegen 1.2 *folgt die zweite Behauptung.*

1.2 Zyklische Gruppen und Diedergruppen

Jede endliche Untergruppe $G < O$ *ist eine zyklische Gruppe* C_n *oder eine Diedergruppe* $D_n, n = 1, \ldots$. *Die zyklische Gruppe* C_n *besteht aus den* n *Drehungen um die Winkel* $2\pi k/n$ *für* $k \in \mathbb{Z}$. *Jede Diedergruppe* D_n *enthält* n *Drehungen und* n *Spiegelungen. Die Drehungen in* D_n *bilden die Gruppe* C_n. *Je zwei benachbarte Spiegelachsen der Spiegelungen in* D_n *schließen den Winkel* π/n *ein, siehe Figur* 1.2.

Punktgruppe als Beispiele für Symmetriegruppen ebener Ornamente

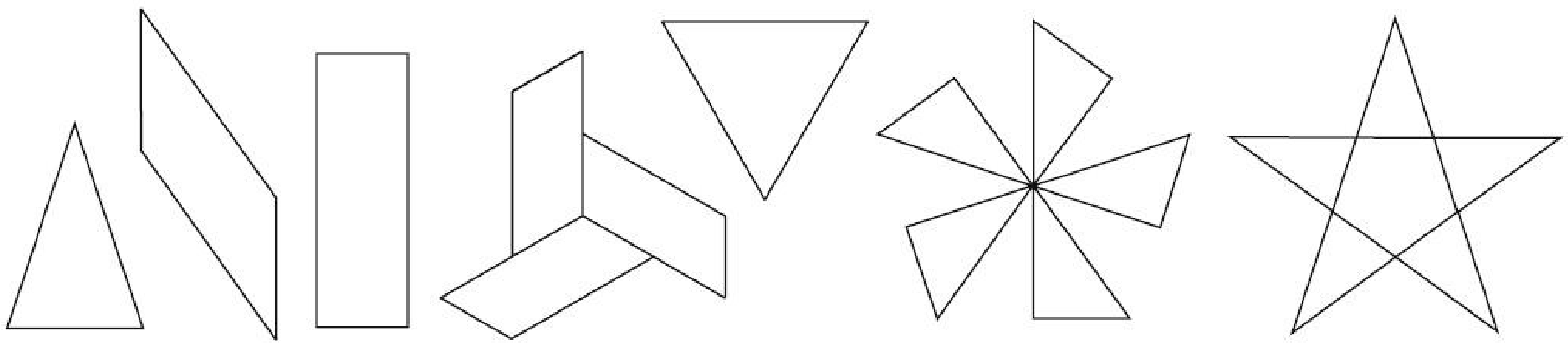


Fig. 1.3 Ornamente mit den Symmetriegruppen D_1, C_2, D_2, C_3, D_3, C_5, D_5. Das Zentrum liegt jeweils im Schwerpunkt der Figur

3. Bandgruppen
3.1 Eindeutige Charakterisierung

Wenn alle Translationsvektoren einer Untergruppe

$G < I$ *eine unendlich zyklische Gruppe* $\mathbb{Z} \cdot a := \{qa : q \in \mathbb{Z}\}$ *bilden,*

heißt G Bandgruppe.

Das heißt:
Bandgruppen lassen neben Drehungen und Spiegelungen auch unendlich viele Translationen zu,

ABER die Translationen sind alles Vielfache von einer Translation um einen Vektor a.

3. Bandgruppen
3.2 Die 4 Elemente der orthogonalen Gruppe

Behauptung:

Die orthogonale Gruppe G_* ist eine der fünf Untergruppen

$$\{id\}, \{\pm id\}, \{id, \mu\}, \{id, \sigma\}, D_2.$$

Beweis:

Sei $A := \mathbb{Z} \cdot a$

die Gruppe der Translationsvektoren der Bandgruppe G.

Lemma:

$\forall \gamma \in G_* : \gamma(a) = \pm a$

Aus letztem Vortrag:

$\Rightarrow$ $\gamma \circ t_a \circ \gamma^{-1} = t_{\gamma(a)}$ für $\gamma \in G_*$

3. Bandgruppen
3.2 Die 4 Elemente der orthogonalen Gruppe

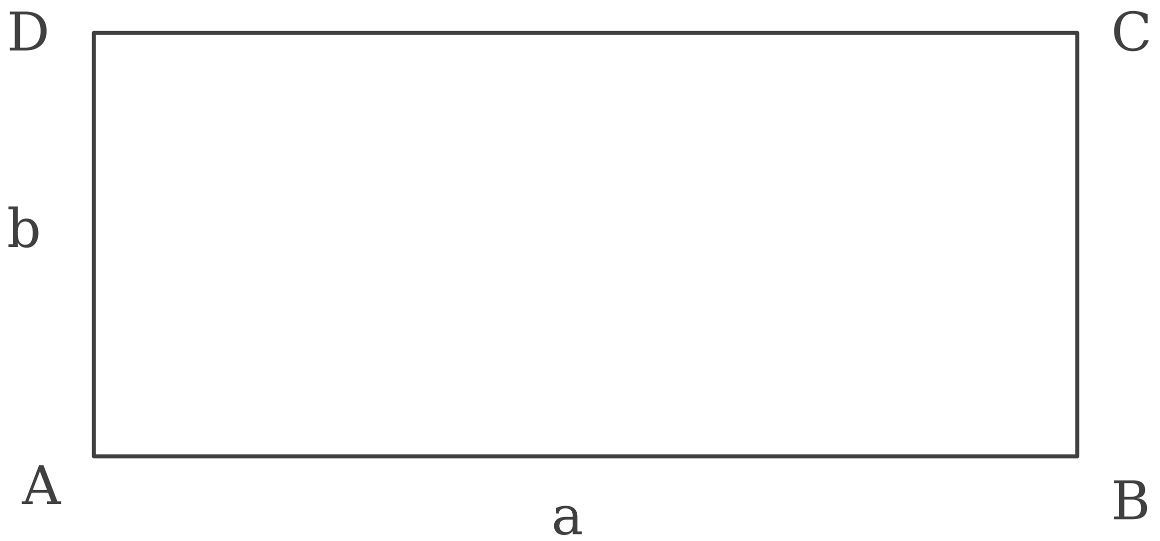
Daher kommen für γ nur 4 Elemente in Frage:

1) *die Identität* id,
2) *die* π*-Drehung* $-id$,
3) *die transversale Spiegelung* μ
   (Spiegelung an der zu a *senkrechten Gerade)*
4) *die longitudinale Spiegelung* σ
   (Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot a$*)* $\square$

Diese vier Elemente bilden eine Diedergruppe D_2*, auch Kleinsche Vierergruppe genannt.*

Kleinsche Vierergruppe:

Symmetriegruppe eines nicht gleichseitigen Rechtecks



1) $id = Drehung\ um\ 0°$
2) $\pi - Drehung - id = Drehung\ um\ 180°$
3) $transversale\ Spiegelung\ \mu$
   $= Spiegelung\ an\ senkrechter\ Mittelachse$
4) $longitudinale\ Spiegelung\ \sigma$
   $= Spiegelung\ an\ waagerechter\ Mittelachse$

3. Bandgruppen

3.3 Die Erzeugung von 7 Bandgruppen

Sei $P \in E$ *ein fester Punkt.*

Wir realisieren die Elemente von D_2 *durch folgende Isometrien:*

$r(P+z) := P - z$ *Punktspiegelung*

$m(P+z) := P + \mu(z)$ *Transversale Spiegelung*

$s(P+z) := P + \sigma(z)$ *Longitudinale Spiegelung*

$g(P+z) := P + \frac{a}{2} + \sigma(z)$ *Gleitspiegelung*

Zusammen mit der Translation $t := t_a$ *ergeben sich*

7 Untergruppen von I:

3. Bandgruppen
3.3 Die Erzeugung von 7 Bandgruppen

$B_1 := \langle t \rangle$ $\qquad B_s := \langle t, s \rangle$ $\qquad B_{ms} := \langle t, m, s \rangle$

$B_2 := \langle t, r \rangle$ $\qquad B_g := \langle g \rangle$ $\qquad B_{mg} := \langle m, g \rangle$

$B_m := \langle t, m \rangle$

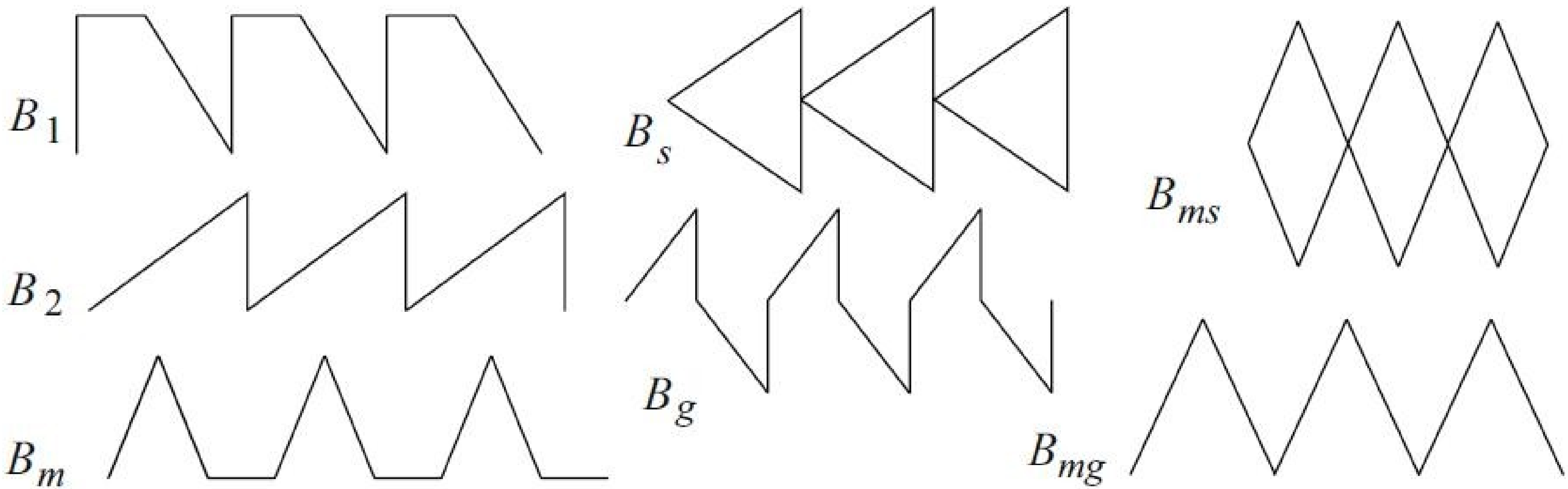


Fig. 3.5 Bandornamente zu den 7 verschiedenen Bandgruppen

3. Bandgruppen
3.3.1 Vollständigkeit der Liste

Behauptung:

Jede Untergruppe $G < I$, deren Translationsvektoren die unendlich zyklische Gruppe $\mathbb{Z} \cdot a$ bilden, kommt nach passender Wahl von P in der Liste vor.

Beweis:

Die orthogonale Gruppe G_* ist eine Untergruppe von D_2.

Es gibt 5 Möglichkeiten:

3. Bandgruppen
3.3.1 Vollständigkeit der Liste

1) $G_* = \{id\}$. $Dann\ ist\ G = \langle t \rangle. Die\ Wahl\ von\ P\ entfällt.$

2) $G_* = \{\pm id\}$.

$In\ G_*\ gibt\ es\ die\ \pi - Drehung\ r\ um\ einen\ Punkt\ P,\ also\ \langle t, r \rangle < G.$

$Jedes\ Element\ h \in G\ lässt\ sich\ durch\ t\ und\ r\ erzeugen.$

$Denn\ für\ h_* = id\ ist\ h \in \langle t \rangle,\ und\ für\ h_* = -id\ liegt\ h\ in\ derselben$

$Restklasse\ modulo\ \langle t \rangle\ wie\ r.$

$Also\ ist\ h = t^q oder\ h = t^q r\ für\ ein\ q \in \mathbb{Z}.$

$Es\ folgt{:}\ G = \langle t, r \rangle$

3. Bandgruppen
3.3.1 Vollständigkeit der Liste

3) $G_* = \langle \mu \rangle$. *Es gibt ein* $m \in G$ *mit* $m_* = \mu$.

Diese Isometrie m ist eine Spiegelung oder Gleitspiegelung an einer zu a senkrechten Geraden.

Bei einer Gleitspiegelung, wäre m^2 *eine Translation in eine zu a senkrechte Richtung, die in G nicht vorkommt.*

Also gibt es ein P, sodass m die Spiegelung $P + z \rightarrow P + \mu(z)$ *ist.*

Es folgt: $G = \langle t, m \rangle$

3. Bandgruppen
3.3.1 Vollständigkeit der Liste

4) $G_* = \langle\sigma\rangle.$ $\quad$ *Es gibt ein* $g \in G$ *mit* $g_* = \sigma$.

Die Isometrie g *ist eine Spiegelung oder Gleitspiegelung*

an einer Geraden $P + \mathbb{R} \cdot a$ *mit einem Gleitvektor* $\lambda a, \lambda \in \mathbb{R}$.

Durch Nachschalten einer Potenz t^q *erreichen wir* $0 \leq \lambda < 1$.

Für $\lambda = 0$ *ist* $g = s$ *eine Spiegelung.*

Für $0 < \lambda < 1$ *ist* $g^2 = t_{2\lambda a}$, *also* $2\lambda a \in \mathbb{Z} \cdot a$ $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$

Es folgt: $G = \langle t, s\rangle$ *oder* $G = \langle g\rangle$.

3. Bandgruppen
3.3.1 Vollständigkeit der Liste

5) $G_* = D_2 = \langle \mu, \sigma \rangle.$

In G gibt es wie bei 3) eine Spiegelung m an einer zu a senktrechten Geraden und wie bei 4) eine Spiegelung s oder Gleitspiegelung g an einer zu a parallelen Geraden.

Sei P der Schnittpunkt der Geraden.

Es folgt: $G = \langle t, m, s \rangle$ *oder* $G = \langle m, g \rangle.$ $\square$

➡ *Gezeigt: Jede Untergruppe kommt in der Liste vor!*

4. Überblick
Was haben wir heute gelernt?

Punktgruppen…

- *sind endliche Untergruppen der Isometriegruppe*
- *enthalten nur Drehungen und Spiegelungen keine Translationen*
- *haben nur Elemente mit gemeinsamen Fixpunkt*
- *haben eine orthogonale Gruppe G_*, die zyklische Gruppe oder Diedergruppe ist*

Bandgruppen…

- *enthalten neben Drehungen und Spiegelungen auch unendlich viele Translationen*
- *enthalten nur Translationen, die Vielfaches voneinander sind*
- *haben eine orthogonale Gruppe G_*, die eine der fünf Untergruppen $\{id\}, \{\pm id\}, \{id, \mu\}, \{id, \sigma_*\}, D_2$ ist.*
- *kommen in 7 verschiedenen Variationen vor*
- *bilden mit ihren Symmetriegruppen Bandornamente*

Quellen:

Lamotke, Klaus: Die Symmetriegruppen der ebenen Ornamente, 2005

http://de.wikipedia.org/wiki/Diedergruppe

http://de.wikipedia.org/wiki/Zyklische_Gruppe