



Hyperbolische Parkettierung

Referentin: Katharina Bäumgen
Seminar: Pro-/Seminar zur Arithmetik
Dozent: Prof. Dr. Skoruppa
Semester: SoSe 2015
Datum: 09.07.2015

Gliederung

A decorative graphic at the top of the slide consists of two groups of three circles. The left group has a solid light purple circle on the left, a white circle with a light purple outline in the middle, and a solid light purple circle on the right. The right group has a solid light purple circle on the left, a white circle with a light purple outline in the middle, and a solid light purple circle on the right.

- euklidische vs. hyperbolische Geometrie
- Fries-, Punkt- und Flächengruppen in der hyperbolischen Geometrie
- Fundamentalteil einer Flächengruppe in der hyperbolischen Geometrie
- Escher-Parkettierungen
- Zusammenfassung

Hyperbolische Geometrie – Historisch

- Parallelenaxiom: (euklidisch)

Zu jeder Gerade g gibt es zu einem Punkt P außerhalb von g genau eine Gerade, die zu g parallel ist und durch P geht.

- Versuch dies zu Beweisen scheiterte

Hyperbolische Geometrie – Historisch

- Negation des Parallelenaxioms →
Hyperbolische Axiom

Zu jeder Gerade g gibt es zu einem Punkt P außerhalb von g mindestens zwei Geraden, die zu g parallel sind und durch P gehen.

- Parallel bedeutet hier:
 - Keine Gemeinsamen Punkte
 - **Nicht** überall den selben Abstand

Poincaré'sches obere Halbebene-Modell

- Betrachte die obere Halbebene mit

$$H := \{z \in \mathbf{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$



- Geraden:
 - Die Halbkreise, deren Zentrum auf der reellen Achse liegen.
 - Die Halbgeraden, die senkrecht auf der reellen Achse stehen.

Poincaré'sches Kreismodel

- Durch Möbiustransformation wird die obere Halbebene auf Kreisscheibe abgebildet

$$z \mapsto (z-i)/(z+i)$$



- *Punkte und Geraden im Inneren der Kreisscheibe*

euklidische vs. hyperbolische Geometrie

Euklidische Geometrie

- Abstand

$$d(P,Q) = |z|$$

$$Q = P + z \quad (z \in \mathbb{C})$$



- Isometrien

Transformationen von $E \rightarrow E$, die den Abstand erhalten.

Hyperbolische Geometrie

- Abstand

Obere Halbebene-Modell

$d(P,Q) =$ Länge Kreisbogen zwischen P und Q

- Isometrien

Transformationen, die den hyperbolischen Abstand erhalten.

Isometrien hyperbolische Geometrie

- spezielle lineare Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$
Gruppe der 2x2 Matrizen mit Determinante 1

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ und } ad - bc = 1 \right\}.$$

$$t_A: z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad A \in SL(2, \mathbb{R})$$

- $I = \{t_A \mid A \in SL(2, \mathbb{R})\}$
- $\pm I$ wirken als Identitätsabbildungen
Es sei $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / \{\pm I_2\}$

Fries-, Punkt- und Flächengruppen

Euklidische Geometrie

- diskrete Untergruppen

- Definition:

Eine Untergruppe Γ heißt diskret, wenn alle Elemente isoliert sind.

In einer hinreichend kleinen Umgebung eines beliebigen Elements $y \in \Gamma$ liegen keine weiteren Elemente aus Γ .

- Beispiel: **Z** ist diskrete Untergruppe von **R**

Fries-, Punkt- und Flächengruppen

Hyperbolische Geometrie

- diskrete Untergruppen
- Es gibt sehr viele
 - Beispiel Modulgruppe $SL(2, \mathbb{Z})$



Fundamentalteil der Flächengruppe hyperbolische Geometrie

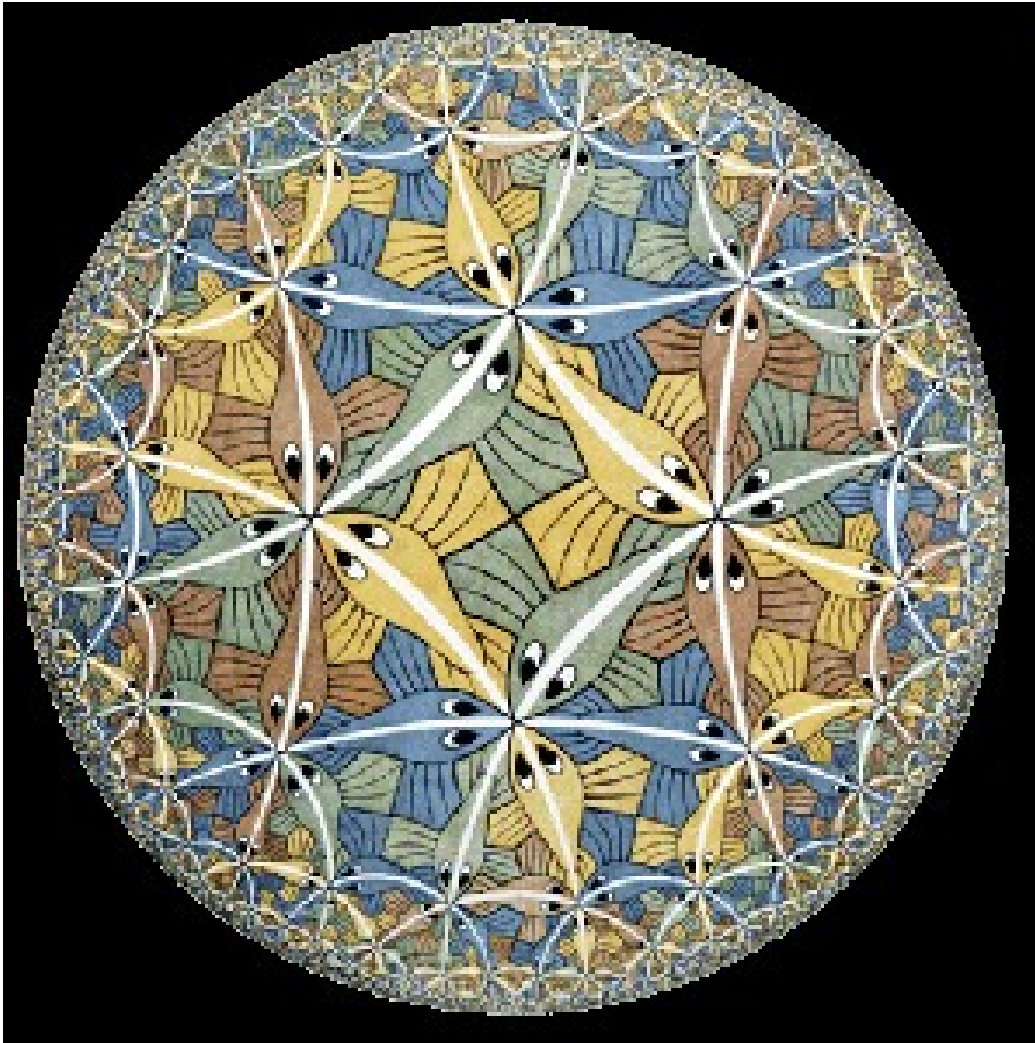
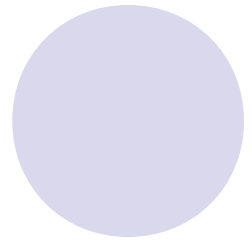
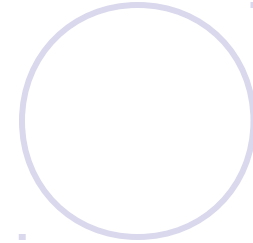
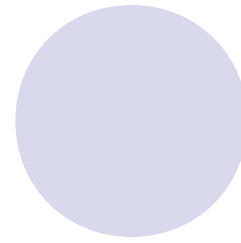
- Beispiel



Hyperbolische Parkettierung

- Auslegung der Ebene mit deckungsgleichen „Plättchen“
- Plättchen entsprechen dem Fundamentalteil
- Auslegung durch Transformation des Fundamentalteils
- $H = \bigcup_{A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})/\pm I} t_A(F)$

Anwendung Escher-Parkettierung



Die weißen Linien zeigen
ein Parkett aus
hyperbolischen Dreiecken
und Vierecken.

Zusammenfassung



- Es gibt neben der euklidischen die hyperbolische Geometrie
 - Modelle:
 - Poincaré'sches obere Halbene-Modell
 - Poincaré'sches Kreismodell
- Zu Punkt-, Fries- und Flächengruppen gibt es Analogien in der hyperbolischen Geometrie
 - diskrete Untergruppen
- Durch Transformation des Fundamentalteils kann die hyperbolische Ebene parkettiert werden.

Quellen



- http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~roth/CG/geoskript3_3.pdf
- https://en.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9_half-plane_model
- <https://de.wikipedia.org/wiki/SL%282,R%29>
- https://people.math.ethz.ch/~michele/AZ/de/ind_hyp.html