Zwischenexamen zur Algebra 2011/2012

Sie dürfen Ihre Vorlesungsmitschrift benutzen.

Aufgabe 1.

Es sei $\mathbb{F} := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, und es bezeichne G die Gruppe $\mathrm{SO}(3,\mathbb{F})$ aller Matrizen A in $\mathbb{F}^{3\times 3}$ mit Determinante 1, die die Gleichung $A^tA = 1$ (d.h. $A^t = A^{-1}$) erfüllen. In dieser Aufgabe wollen wir die Gruppe G studieren.

1. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $(g,x) \mapsto gx$ ($g \in G, x \in \mathbb{F}^3$) eine Operation von G auf der Menge $S := \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$definiert.
2. Fertigen Sie eine Liste der Elemente in S an.
3. Zeigen Sie, dass die Operation von G auf S transitiv ist.
4. Berechnen Sie die Ordnung des Stabilisators in G des Elements $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
5. Drücken Sie $|G|$ vermöge der Abzählformel durch $|S|$ aus.
6. Bestimmen Sie mittels der vorangenden Abzählformel und Teilaufgabe 2 die Ordnung von $G = \mathrm{SO}(3,\mathbb{F})$.
7. Folgern Sie, dass $G = \mathrm{SO}(3,\mathbb{F})$ zur Gruppe der mit Vorzeichen versehenen Permutationsmatrizen in $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ isomorph ist. (Eine *mit Vorzeichen versehene Permutationsmatrix* ist eine reguläre Matrix, die in jeder Spalte nur ein von 0 verschiedenes Element enthält, welches dann ± 1 ist.)

Lösungen:

1) Ist $g \in G$, $s \in S$, dann gilt $(gx)^T gx = x^T g^T g x = x^T x = 1$ (wobei die zweite Identität aus $g^T g = 1$ folgt), d.h. $gx \in S$.

2) $S = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3) Wir zeigen $S =$ Orbit von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ist $x \in S$, so wähle dazu $y, z \in S$, sodass $g = (x\, y\, z) \in G$ ist. Es gilt offenbar $x = g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4) Sei $g = (x\, y\, z) \in G$. Dann gilt $x, y, z \in S$ und $x^T y = x^T z = y^T z = 0$. Es gilt $g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ g.d.w. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Also ist $g \in \mathrm{Stab}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ g.d.w. $g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & a & \\ 0 & & b \end{pmatrix}$ oder $g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & d \\ 0 & c & \end{pmatrix}$ für $a, b, c, d \in \mathbb{F}^\times$. Wegen $\det g = 1$ sind die beiden letzten Identitäten nur dann möglich wenn $a = b$ und $-c = d$. Es folgt $\mathrm{Stab}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & a & \\ 0 & & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & -a \\ 0 & a & \end{pmatrix}, a \in \mathbb{F}^\times \right\}$.

5) $|G| = |S|\,\left|\mathrm{Stab}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = |S| \cdot 4$.

6) $|G| = |S| \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$.

7) Sei P die Gruppe der mit Vorzeichen versehenen Permutationsmat. m. det = 1. Die Zuordnung $A \mapsto \tilde{A}$, wo $\tilde{A}$ aus A entsteht, indem jedes Element a in A durch $[a]_3$ ersetzt wird, definiert einen Gruppenhom. $f: P \to G$. Dieser ist offenbar injektiv. Da P auch 24 Elemente hat (nämlich $|S_3| \cdot 8$ Vorzeichen dividiert durch 2 wegen $\det = 1$) ist f ein Isomorphismus.